مثال: پیوستگی تابع زیر را در مبدأ مختصات بررسی کنید:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4+y^4}{(x^2+y^2)^{3/2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$x=r\cos(\theta) \quad , \quad y=r\sin(\theta)$$

$$\lim_{r\to 0}\frac{r^4(\cos^4(\theta)+\sin^4(\theta))}{(r^2)^{3/2}}=\lim_{r\to 0} r\,[\underbrace{\cos^4(\theta)+\sin^4(\theta)}_{\text{کراندار}}]=0$$

پس تابع f یک تابع پیوسته است.

مثال: پیوستگی تابع زیر را در مبدأ مختصات بررسی کنید.

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

همانطور که قبلاً دیدیم این تابع در $(0,0)$ حد ندارد لذا نمی‌تواند در $(0,0)$ پیوسته باشد

مثال: آیا می‌توان ضابطه تابع $f(x,y)=\dfrac{\sin(x)\sin(3y)}{1-\cos(x^2+y^2)}$ را طوری تعریف کرد که تابع پیوسته باشد؟

روی مسیر $x=0$ داریم:

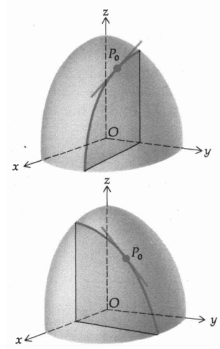
$$\lim_{(0,y)\to(0,0)}\frac{\sin(0)\sin(3y)}{1-\cos(y^2)}=\lim_{(0,y)\to(0,0)}\frac{\overset{\text{مطلق}}{0}}{\underset{\text{حدی}}{0}}=0 \text{ مطلق}$$

$$\lim_{(x,x)\to(0,0)}\frac{\sin(x)\sin(3x)}{1-\cos(x^2+x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{4x^4}=\infty$$

مشتقات جزئی: مشتقات جزئی مرتبه اول تابع $f(x,y)$ نسبت به متغیرهای x و y به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f_1(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$$

$$f_2(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h}$$



نمادگذاری‌های دیگر:

اگر $z=f(x,y)$ باشد.

$$f_1(x,y) = f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f = \frac{\partial z}{\partial x} = z_x$$

$$f_2(x,y) = f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f = \frac{\partial z}{\partial y} = z_y$$

جهت محاسبه مشتق جزئی در نقطه (a,b) نمادگذاری‌های زیر را داریم:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(a,b)} = \left.\left(\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\right)\right|_{(a,b)} = f_1(a,b)$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(a,b)} = \left.\left(\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\right)\right|_{(a,b)} = f_2(a,b)$$

تذکر: برای محاسبه مشتق جزئی f نسبت به x، f را تابعی از x در نظر گرفته و با y مانند یک پارامتر ثابت برخورد می‌کنیم. به همین ترتیب جهت محاسبه مشتق جزئی تابع f نسبت به y، f را تابعی از y در نظر گرفته و x را یک پارامتر ثابت در نظر می‌گیریم.

مثال: اگر $z = x^3y^2 + x^4y + y^4$، مقدار $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ را بدست آورید.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2y^2+4x^3y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=2x^3y+x^4+4y^3$$

مثال: اگر $f(x,y)=e^{xy}\cos(x+y)$ باشد مقدار $f_1(0,\pi)$ و f_x و f_y را بدست آورید

$$f_x(x,y)=ye^{xy}\cos(x+y)-e^{xy}\sin(x+y)$$

$$f_y(x,y)=xe^{xy}\cos(x+y)-e^{xy}\sin(x+y)$$

$$f_1(0,\pi)=-\pi$$

بحث فوق قابل تعمیم به توابع n متغیره است.

تعریف: اگر $w=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ ، در اینصورت

$$\frac{\partial w}{\partial x_k}=f_{x_k}(x_1,x_2,\dots,x_n)$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_1,x_2,\dots,x_k+h,\dots,x_n)-f(x_1,\dots,x_n)}{h}$$

جهت محاسبه $\frac{\partial w}{\partial x_k}$ ، w را تابعی از x_k در نظر گرفته و بقیه متغیرها را ثابت در نظر می‌گیریم

مثال: اگر $f(x,y,z)=x^2y^3z+z^2x+y^3+z^3-2$ در اینصورت

$$f_x=2xy^3z+z^2$$

$$f_y=3x^2y^2z+3y^2\quad,\quad f_z=x^2y^3+2zx+3z^2$$

مثال: اگر $f(x,y,z)=\dfrac{2xy}{1+xz+yz}$ ، f_z را بیابید.

$$f_z(x,y,z)=-\frac{2xy}{(1+xz+yz)^2}(x+y)$$

مشتقات جزئی مراتب بالاتر:

مشتقات جزئی مرتبه دوم یا بالاتر با مشتق جزئی گرفتن از مشتقات جزئی که قبلاً محاسبه شده، محاسبه می‌شوند. اگر $z=f(x,y)$ ، می‌توانیم چهار مشتق جزئی مرتبه دوم تعریف کنیم

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=f_{11}(x,y)=f_{xx}(x,y)$$

(مشتق جزئی دوم محض)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=f_{22}(x,y)=f_{yy}(x,y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=f_{21}(x,y)=f_{yx}(x,y)$$

(مشتق جزئی دوم آمیخته)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=f_{12}(x,y)=f_{xy}(x,y)$$

مثال: چهار مشتق جزئی مرتبه دوم $f(x,y)=x^3y^4$ را پیدا کنید.

$$f_x=3x^2y^4 \quad , \quad f_y=4x^3y^3$$

$$f_{xx}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}(3x^2y^4)=6xy^4$$

$$f_{yx}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}(4x^3y^3)=12x^2y^3$$

$$f_{xy}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}(3x^2y^4)=12x^2y^3$$

$$f_{yy}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}(4x^3y^3)=12x^3y^2$$

تذکر: تعریف قبلی را می‌توان برای مشتقات مراتب بالاتر نیز تعمیم داد.

مثال: اگر $f(x,y,z)=e^{x-2y+3z}$ باشد f_{yyz} ، f_{yzy} ، f_{zyy} را محاسبه کنید.

$$f_{yyz}(x,y,z)=\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}e^{x-2y+3z}$$

$$=\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y}\left(-2e^{x-2y+3z}\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial z}\left(4e^{x-2y+3z}\right)=12e^{x-2y+3z}$$

$$f_{yzy}(x,y,z)=\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y}e^{x-2y+3z}$$

$$=\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z}\left(-2e^{x-2y+3z}\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial y}\left(-6e^{x-2y+3z}\right)=12e^{x-2y+3z}$$

$$f_{zyy}(x,y,z)=\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z}e^{x-2y+3z}$$

$$=\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\left(3e^{x-2y+3z}\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial y}\left(-6e^{x-2y+3z}\right)=12e^{x-2y+3z}$$

در هر دو مثال بالا دیدیم که مشتقات جزئی آمیخته که نسبت به متغیرهای یکسان ولی در ترتیب های مختلف در نظر گرفته می‌شوند، برابر است. این امر تصادفی نیست.

قضیه: (برابری مشتق های جزئی آمیخته)

فرض کنید دو مشتق جزئی مرتبه nام آمیخته تابع f حاوی مشتق گیری های مشابه، اما با ترتیب های مختلف باشند. اگر این مشتق های جزئی در P پیوسته باشند و اگر f و تمام مشتق های جزئی f که دارای مرتبه کمتر از n هستند در مجاورت P پیوسته باشند، آنگاه دو مشتق جزئی آمیخته در نقطه P برابر هستند.

تمرین: فرض کنید

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\[2mm] 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

نشان دهید f_{12} و f_{21} در نقطه $(0,0)$ باهم برابر نیستند

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{(y(x^2-y^2)+2x^2y)(x^2+y^2)-2x^2y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$=\frac{(3x^2y-y^3)(x^2+y^2)-2x^4y+2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}=\frac{3x^4y+3x^2y^3-x^2y^3-y^5-2x^4y+2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}$$

$$=\frac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2}\qquad (x,y)\neq(0,0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{(x(x^2-y^2)-2xy^2)(x^2+y^2)-2xy^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$=\frac{(x^3-3xy^2)(x^2+y^2)-2x^3y^2+2xy^4}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^5+x^3y^2-3x^3y^2-3xy^4-2x^3y^2+2xy^4}{(x^2+y^2)^2}$$

$$=\frac{x^5-4x^3y^2-xy^4}{(x^2+y^2)^2}\qquad (x,y)\neq(0,0)$$

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\frac{0-0}{h}=0$$

به طور مشابه

$$f_y(0,0)=0$$

$$f_{yx}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f_y(0+h,0)-f_y(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{h^5}{h^4}-0}{h}=1$$

$$f_{xy}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f_x(0,0+h)-f_x(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-\frac{h^5}{h^4}}{h}=-1$$

لذا $f_{xy}(0,0)\neq f_{yx}(0,0)$

معادلات موج و لاپلاس :

مثال : نشان دهید که به ازای هر عدد حقیقی k، توابع

$z=e^{kx}\cos(ky)$ $\qquad$ $z=e^{kx}\sin(ky)$

در معادله دیفرانسیل جزئی زیر در هر نقطه از صفحه xy صدق می کند

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

حل : اگر $z=e^{kx}\cos(ky)$، داریم :

$$\frac{\partial z}{\partial x}=ke^{kx}\cos(ky)\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=k^2e^{kx}\cos(ky)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-k\,e^{kx}\sin(ky)\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=-k^2e^{kx}\cos(ky)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=k^2e^{kx}\cos(ky)-k^2e^{kx}\cos(ky)=0$$

به همین ترتیب می توان نشان داد که تابع $z=e^{kx}\sin(ky)$ در معادله فوق صدق می کند.

تذکر: معادله فوق را معادله لاپلاس دوبعدی می نامند. هر تابع دو متغیره دارای مشتق جزئی دوم پیوسته در ناحیه‌ای از صفحه اگر در معادله لاپلاس صدق کند، همساز نامیده می شود،

توابع همساز مقدار ماکزیمم و مینیمم خود را روی مرز دامنه می گیرند.

مثال: اگر f و g توابع یک متغیره دوبار مشتق پذیر باشند، نشان دهید که

$$w = f(x-ct) + g(x+ct)$$

در معادله دیفرانسیل جزئی زیر صدق می کند

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$ (معادله موج یک بعدی)

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -cf'(x-ct) + cg'(x+ct)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 f''(x-ct) + c^2 g''(x+ct)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = f'(x-ct) + g'(x+ct)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = f''(x-ct) + g''(x+ct)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$

مثال: نشان دهید که $w = e^{3x+4y}\sin(5z)$ در تمام $\mathbb{R}^3$ هارمونیک است، یعنی در معادله لاپلاس سه بعدی زیر صدق می کند:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0$$

حل:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 3e^{3x+4y}\sin(5z)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 9e^{3x+4y}\sin(5z)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = 4e^{3x+4y}\sin(5z)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 16e^{3x+4y}\sin(5z)$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 5e^{3x+4y}\cos(5z) \quad , \quad \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = -25e^{3x+4y}\sin(5z)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 9e^{3x+4y}\sin(5z) + 16e^{3x+4y}\sin(5z)$$

$$-25e^{3x+4y}\sin(5z) = 0$$

توابع دوهمساز: اگر $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ یک تابع همساز باشد، آنگاه تابع $u(x,y)$ با مشتقات جزئی مرتبه چهارم پیوسته را دوهمساز می‌نویسیم.

تمرین: نشان دهید که $u(x,y)$ دوهمساز است اگر و تنها اگر در معادله دیفرانسیل جزئی زیر صدق کند:

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0$$

تمرین: نشان دهید که اگر $u(x,y)$ همساز باشد، $xu(x,y)$ ، $yu(x,y)$ دوهمساز هستند.

مثال: نشان دهید تابع $xe^x \sin(y)$ یک تابع دوهمساز است.

حل: با توجه به تمرین قبل کافیست نشان دهیم که $e^x \sin(y)$ یک تابع همساز است.

اما قبلاً دیدیم که $e^{kx}\sin(y)$ همساز می باشد. پس $xe^x \sin(y)$ دوهمساز است.

تمرین: نشان دهید که تابع $u(x,y,t)=t^{-1}e^{-(x^2+y^2)/4t}$ در معادله دوبعدی

گرما صدق می کند:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

قانون زنجیره ای:

حالت اول: اگر z تابعی از x و y با مشتقات جزئی اول پیوسته باشد و اگر x و y توابعی

مشتق پذیر از t باشند آنگاه

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

مثال: فرض کنید $w=x^2y-y^3$ که در آن $x=\sin(t)$ و $y=e^t$ باشند.

$\frac{dw}{dt}$ را بیابید.

روش اول:

$$\frac{dw}{dt}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

$$=2xy\cos(t)+(x^2-3y^2)e^t=2\sin(t)e^t\cos(t)+(\sin^2(t)-3e^{2t})e^t$$

$$=e^t\sin(2t)+e^t\sin^2(t)-3e^{3t}$$

روش دوم: (جایگذاری)

$$w=x^2y-y^3=\sin^2(t)e^t-e^{3t}$$

$$\frac{dw}{dt}=2\sin(t)\cos(t)e^t+\sin^2(t)e^t-3e^{3t}$$

قانون زنجیره‌ای در قضیه قبل به صورت زیر قابل تعمیم است.

اگر $w = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ و x_i تابعی مشتق پذیر و کل متغیره از t باشد، در اینصورت

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial w}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + \cdots + \frac{\partial w}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}$$

مثال: دو شیء بر روی مسیرهای بیضوی که با معادلات پارامتری زیر داده شده‌اند، حرکت می‌کنند:

$x_1 = 4\cos(t)$ ، $x_2 = 2\sin(2t)$ ،

$y_1 = 2\sin(t)$ $y_2 = 3\cos(2t)$

با چه سرعتی فاصله این دو شیء وقتی $t = \pi$ است تغییر می‌کند؟

حل: $S = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

وقتی $t = \pi$ داریم: $x_1 = -4$ ، $x_2 = 0$ ، $y_1 = 0$ ، $y_2 = 3$ و $S = 5$

$$\frac{\partial S}{\partial x_1} = \frac{-2(x_2 - x_1)}{2\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} \Rightarrow \left.\frac{\partial S}{\partial x_1}\right|_{t=\pi} = -\frac{1}{5}(0+4) = -\frac{4}{5}$$

$$\frac{\partial S}{\partial x_2} = \left.\frac{(x_2 - x_1)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}\right|_{t=\pi} = \frac{1}{5}(0+4) = \frac{4}{5}$$

$$\frac{\partial S}{\partial y_1} = \frac{-(y_2 - y_1)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} , \quad \left.\frac{\partial S}{\partial y_1}\right|_{t=\pi} = -\frac{3}{5}$$

$$\frac{\partial S}{\partial y_2} = \frac{(y_2 - y_1)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} , \quad \left.\frac{\partial S}{\partial y_2}\right|_{t=\pi} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{dx_1}{dt} = -4\sin(t) \Rightarrow \left.\frac{dx_1}{dt}\right|_{t=\pi} = 0$$

$$\frac{dx_2}{dt} = 4\cos(2t) \Rightarrow \left.\frac{dx_2}{dt}\right|_{t=\pi} = 4$$

$$\frac{dy_1}{dt} = 2\cos(t) \Rightarrow \left.\frac{dy_1}{dt}\right|_{t=\pi} = -2$$

$$\frac{dy_2}{dt} = -6\sin(2t) \Rightarrow \left.\frac{dy_2}{dt}\right|_{t=\pi} = 0$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\partial s}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial s}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial s}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dt} + \frac{\partial s}{\partial y_2}\frac{dy_2}{dt}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=\pi} = -\frac{4}{5}\times 0 + \frac{-3}{5}\times(-2) = \frac{4}{5}\times 4 + \frac{3}{5}\times 0 = \frac{22}{5}$$

قضیه (قانون زنجیره‌ای دو متغیر مستقل)

اگر z تابعی از x و y با مشتقات جزئی اول پیوسته باشد و اگر x و y به s و t بستگی داشته باشند، آنگاه

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

تذکر: دو معادله بالا را می‌توان به فرم ماتریسی زیر نوشت:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial s} \\ \frac{\partial z}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} \end{bmatrix}$$

مثال: اگر $z=\sin(x^2y)$ که در آن $x=st^2$ و $y=s^2+\frac{1}{t}$ مطلوب است $\frac{\partial z}{\partial s}$ و $\frac{\partial z}{\partial t}$.

حل: روش اول

$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2xy\cos(x^2y) \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y}=x^2\cos(x^2y)$$

$$\frac{\partial x}{\partial s}=t^2 \quad , \quad \frac{\partial y}{\partial s}=2s$$

$$\frac{\partial z}{\partial s}=2xy\cos(x^2y)\,t^2+x^2\cos(x^2y)\,2s$$

$$=2st^2(s^2+\frac{1}{t})\,t^2\cos(s^4t^4+s^2t^3)+2s^3t^4\cos(s^4t^4+s^2t^3)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial x}{\partial t}=2ts \quad , \quad \frac{\partial y}{\partial t}=-\frac{1}{t^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial t}=2xy\cos(x^2y)(2st)+x^2\cos(x^2y)(-\frac{1}{t^2})$$

$$=2(st^2)(s^2+\frac{1}{t})(2st)\cos(s^4t^4+s^2t^3)+(st^2)^2(-\frac{1}{t^2})\cos(s^4t^4+s^2t^3)$$

$$=(4s^4t^3+3s^2t^2)\cos(s^4t^4+s^2t^3)$$

روش دوم: می‌توان به کمک جایگذاری نیز $\frac{\partial z}{\partial s}$ و $\frac{\partial z}{\partial t}$ را محاسبه نمود:

$$z=\sin(x^2y)=\sin((st^2)^2(s^2+\frac{1}{t}))$$

$$z=\sin(s^4t^4+s^2t^3)$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = (4s^3t^4 + 2st^3)\cos(s^4t^4 + s^2t^3)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = (4t^3s^4 + 3t^2s^2)\cos(s^4t^4 + s^2t^3)$$

قانون زنجیره‌ای را می‌توان برای توابع n متغیره تعمیم داد. فرض کنید $w = f(x_1, \dots, x_n)$

وهر x_i تابعی از m متغیر $t_1, t_2, \dots, t_m$ باشد، دراینصورت

$$x_i = x_i(t_1, \dots, t_m)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t_i} = \frac{\partial w}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \frac{\partial w}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_i} + \dots + \frac{\partial w}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_i}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial w}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial t_i}$$

مثال: اگر $w = xy + yz + xz$ باشد و $x = s\cos(t)$ ، $y = s\sin(t)$ و $z = t$

باشد، $\frac{\partial w}{\partial s}$ را محاسبه کنید.

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = (y+z)\cos(t) + (x+z)\sin(t) + (y+x)\times 0$$

$$= (s\sin(t) + t)\cos(t) + (s\cos(t) + t)\sin(t)$$

مثال: $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x^2+y^2, xy)$ را برحسب مشتقات جزئی تابع f محاسبه کنید. فرض

کنید که مشتق‌های جزئی مرتبه دوم f پیوسته هستند.

حل: اگر $u=x^2-y^2$ و $v=xy$ درانصورت می خواهیم عبارت روبه رو را محاسبه کنیم:

$$\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} f(u,v)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(u,v) = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = -2y\, f_1(u,v) + x\, f_2(u,v)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y} f(u,v)\right) = -2y\left(f_{11}(u,v)\frac{\partial u}{\partial x} + f_{12}(u,v)\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$
$$+ f_2(u,v) + x\left(f_{21}(u,v)\frac{\partial u}{\partial x} + f_{22}(u,v)\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$
$$= -2y\left(2x\, f_{11}(u,v) + y\, f_{12}(u,v)\right) + f_2(u,v)$$
$$+ x\left(2x\, f_{21}(u,v) + y\, f_{22}(u,v)\right)$$
$$= f_2(u,v) - 4xy\, f_{11}(u,v) + 2(x^2-y^2) f_{12}(u,v) + xy\, f_{22}(u,v)$$

مثال: نشان دهید معادله لاپلاس دو بعدی $\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = 0$ در مختصات قطبی به صورت $\frac{\partial^2 Z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial Z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 Z}{\partial \theta^2} = 0$ است.

حل:

$$x = r\cos(\theta),\quad y = r\sin(\theta)$$

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos(\theta),\quad \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r\sin(\theta)$$

$$\frac{\partial y}{\partial r} = \sin(\theta),\quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos(\theta)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial r} = \frac{\partial Z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial Z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \cos(\theta)\frac{\partial Z}{\partial x} + \sin(\theta)\frac{\partial Z}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial Z}{\partial r}\right) = \cos(\theta)\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right) + \sin(\theta)\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)$$
$$= \cos(\theta)\left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial^2 Z}{\partial y\,\partial x}\frac{\partial y}{\partial r}\right)$$
$$+ \sin(\theta)\left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial r}\right)$$

$$= \cos^2(\theta)\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \cos(\theta)\sin(\theta)\frac{\partial^2 Z}{\partial y\,\partial x} + \sin(\theta)\cos(\theta)\frac{\partial^2 Z}{\partial x\,\partial y}$$

$$+ \sin^2(\theta)\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = \cos^2(\theta)\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \sin(2\theta)\frac{\partial^2 Z}{\partial x\,\partial y} + \sin^2(\theta)\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \theta} = \frac{\partial Z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial Z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}$$

$$= -r\sin(\theta)\frac{\partial Z}{\partial x} + r\cos(\theta)\frac{\partial Z}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial \theta^2} = \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial Z}{\partial \theta}\right) = -r\cos(\theta)\frac{\partial Z}{\partial x} - r\sin(\theta)\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)$$

$$-r\sin(\theta)\frac{\partial Z}{\partial y} + r\cos(\theta)\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)$$

$$= -r\cos(\theta)\frac{\partial Z}{\partial x} - r\sin(\theta)\left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 Z}{\partial y\,\partial x}\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)$$

$$-r\sin(\theta)\frac{\partial Z}{\partial y} + r\cos(\theta)\left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)$$

$$= -r\frac{\partial Z}{\partial r} - r\sin(\theta)\left(-r\sin(\theta)\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + r\cos(\theta)\frac{\partial^2 Z}{\partial y\,\partial x}\right)$$

$$+ r\cos(\theta)\left(-r\sin(\theta)\frac{\partial^2 Z}{\partial x\,\partial y} + r\cos(\theta)\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}\right)$$

$$= -r\frac{\partial Z}{\partial r} + r^2\left(\sin^2(\theta)\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} - 2\sin(\theta)\cos(\theta)\frac{\partial^2 Z}{\partial x\,\partial y}\right.$$

$$\left. + \cos^2(\theta)\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 Z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial Z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 Z}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}$$

تذکر: توجه کنید که در این مثال معادله لاپلاس در مختصات قطبی داده شده بود و فقط کافی بود برابری طرفین را چک کنیم. حال می خواهیم با فرض اینکه معادله لاپلاس در مختصات قطبی داده نشده باشد آن را به دست آوریم:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2} \quad , \quad \theta = tg^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + C$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{2r\cos(\theta)}{2r} = \cos(\theta)$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \sin(\theta), \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{-\frac{y}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}} = -\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{r\sin(\theta)}{r^2} = -\frac{\sin(\theta)}{r}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1/x}{1+\frac{y^2}{x^2}} = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{r\cos(\theta)}{r^2} = \frac{\cos(\theta)}{r}$$

پس به طور خلاصه:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos(\theta) \quad , \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \sin(\theta)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\sin(\theta)}{r} \quad , \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos(\theta)}{r}$$

پس داریم:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos(\theta)\, u_r - \frac{\sin(\theta)}{r}\, u_\theta$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(\cos(\theta)\, u_{rr} + \frac{\sin(\theta)}{r^2}\, u_\theta - \frac{\sin(\theta)}{r}\, u_{\theta r}\right)\cos(\theta)$$

$$+ \left(-\sin(\theta)\, u_r + \cos(\theta)\, u_{r\theta} - \frac{\cos(\theta)}{r}\, u_\theta - \frac{\sin(\theta)}{r}\, u_{\theta\theta}\right) \times \frac{-\sin(\theta)}{r}$$

$$= \cos^2(\theta)\, u_{rr} + \frac{\sin(\theta)\cos(\theta)}{r^2}\, u_\theta - \frac{\sin(\theta)\cos(\theta)}{r}\, u_{\theta r}$$

$$+ \frac{\sin^2(\theta)}{r}\, u_r - \frac{\cos(\theta)\sin(\theta)}{r}\, u_{r\theta} + \frac{\cos(\theta)\sin(\theta)}{r^2}\, u_\theta$$

$$+ \frac{\sin^2(\theta)}{r^2}\, u_{\theta\theta}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \cos^2(\theta) u_{rr} + \frac{\sin(2\theta)}{r^2} u_\theta - \frac{\sin(2\theta)}{r} u_{r\theta} + \frac{\sin^2(\theta)}{r} u_r + \frac{\sin^2(\theta)}{r^2} u_{\theta\theta}$$

به همین ترتیب می توان مقدار $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ را محاسبه نمود:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y}$$

$$= \sin(\theta) u_r + \frac{\cos(\theta)}{r} u_\theta$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial \theta}{\partial y}$$

$$= \left(\sin(\theta) u_{rr} - \frac{\cos(\theta)}{r^2} u_\theta + \frac{\cos(\theta)}{r} u_{\theta r}\right) \times \sin(\theta)$$

$$+ \left(\cos(\theta) u_r + \sin(\theta) u_{r\theta} - \frac{\sin(\theta)}{r} u_\theta + \frac{\cos(\theta)}{r} u_{\theta\theta}\right) \frac{\cos(\theta)}{r}$$

$$= \sin^2(\theta) u_{rr} - \frac{\cos(\theta)\sin(\theta)}{r^2} u_\theta + \frac{\cos(\theta)\sin(\theta)}{r} u_{\theta r}$$

$$+ \frac{\cos^2(\theta)}{r} u_r + \frac{\sin(\theta)\cos(\theta)}{r} u_{r\theta} - \frac{\sin(\theta)\cos(\theta)}{r^2} u_\theta + \frac{\cos^2(\theta)}{r^2} u_{\theta\theta}$$

$$= \sin^2(\theta) u_{rr} - \frac{\sin(2\theta)}{r^2} u_\theta + \frac{\sin(2\theta)}{r} u_{r\theta} + \frac{\cos^2(\theta)}{r} u_r + \frac{\cos^2(\theta)}{r^2} u_{\theta\theta}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) u_{rr} + \left(\frac{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)}{r}\right) u_r$$

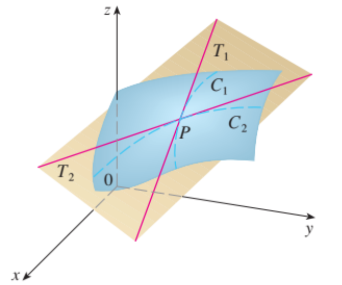
$$+ \left(\frac{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)}{r^2}\right) u_{\theta\theta} = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta}$$

لذا معادله لاپلاس دوبعدی در مختصات قطبی به فرم زیر خواهد بود:

$$u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = 0$$

تعریف (صفحه مماس بر یک رویه) فرض کنید $P_0=(x_0,y_0,z_0)$ یک نقطه بر رویه S باشد.
در این صورت اگر تمام خطوط مماس بر منحنی های گذرا از نقطه P_0 که روی S قرار دارند، همگی در یک صفحه واقع شده باشند، این صفحه را صفحه مماس بر S در نقطه P_0 می گوییم.

در حالت خاص فرض کنید S رویه مربوط به نمودار $z=f(x,y)$ و f در یک همسایگی از نقطه (x_0,y_0) تعریف شده باشد. در این صورت صفحه مماس بر منحنی در نقطه $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ صفحه‌ای است که تمام خطوط مماس بر منحنی های گذرا از نقطه P_0 و روی S همگی در این صفحه باشند.



معادله صفحه مماس: فرض کنید C_1 خمی باشد که از قطع صفحه $x=x_0$ با رویه $z=f(x,y)$ و C_2 خمی باشد که از قطع صفحه $y=y_0$ با رویه $z=f(x,y)$ به وجود می آید. اگر $f_x(x_0,y_0)$ و $f_y(x_0,y_0)$ هر دو موجود باشند، در این صورت معادله خط مماس بر C_1 در نقطه (x_0,y_0,z_0) که $z_0=f(x_0,y_0)$ به صورت

$$L_1:\quad z-z_0=f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

و معادله خط مماس بر C_2 به صورت

$$L_2:\quad z-z_0=f_x(x_0,y_0)(x-x_0)$$

است. توجه کنید که اگر صفحه مماس T بر نقطه (x_0,y_0,z_0) موجود باشد، باید شامل L_1 و L_2 باشد. حال اگر معادله صفحه مماس را به صورت

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

در نظر بگیریم، قطع این صفحه با صفحه $x=x_0$ باید خط L_1 و قطع آن با صفحه $y=y_0$ باید

باید خط L_2 باشد لذا معادله صفحه به صورت زیر است:

$$(z - f(x_0, y_0)) - f_x(x_0, y_0)(x - x_0) - f_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$$

نتیجه: اگر $z = f(x,y)$ و S نمودار آن باشد، معادله صفحه مماس بر رویه S در نقطه $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ به صورت زیر است:

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

حال می‌خواهیم به تعریف مشتق پذیری تابع $f(x,y)$ در یک نقطه مانند (x_0, y_0) بپردازیم.

توجه داشته باشید که اگر f_x و f_y در نقطه‌ای مانند (x_0, y_0) موجود باشند حتی پیوستگی تابع در این نقطه را تضمین نمی‌کنند.

تعریف: فرض کنید تابع $f(x,y)$ در یک همسایگی از نقطه (x_0, y_0) تعریف شده باشد، در این صورت تابع f را در نقطه (x_0, y_0) مشتق پذیر گوییم هرگاه رویه $z = f(x,y)$ در نقطه $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ صفحه مماس داشته باشد.

اگر صفحه مماس بر رویه $z = f(x,y)$ در نقطه $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ موجود باشد، در این صورت می‌توانیم از صفحه مماس برای تقریب تابع $z = f(x,y)$ در نقاط نزدیک به (x_0, y_0) استفاده کنیم:

$$f(x,y) \simeq L(x,y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

$L(x,y)$ را خطی‌سازی f در (x_0, y_0) می‌نامیم. در صورت مشتق پذیری تابع f در نقطه (x_0, y_0) (و لذا وجود صفحه مماس بر رویه S در $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$) باید خطای خطی‌سازی در مقایسه با فاصله نقطه (x,y) از (x_0, y_0) ناچیز باشد. این موضوع به تعریف جبری مشتق پذیری تابع f در نقطه (x_0, y_0) منجر می‌شود.

تعریف: گوییم تابع f در نقطه (x_0, y_0) مشتق پذیر است هرگاه:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - h f_x(x_0,y_0) - k f_y(x_0,y_0)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

قضیه: اگر f_x و f_y در یک همسایگی نقطه (x_0,y_0) پیوسته باشند، آنگاه f در (x_0,y_0) مشتق پذیر است.

قضیه: اگر $f(x,y)$ در نقطه (x_0,y_0) مشتق پذیر باشد در (x_0,y_0) پیوسته است.

تذکر: به صورت معادل می توان تعریف زیر را برای مشتق پذیری ارائه نمود:

تعریف: تابع $z=f(x,y)$ را در نقطه (x_0,y_0) مشتق پذیر گوییم هرگاه نمو Δz یعنی $f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)$ را بتوان به فرم زیر نوشت:

$$\Delta z = f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y + \varepsilon_1(\Delta x,\Delta y)\Delta x + \varepsilon_2(\Delta x,\Delta y)$$

وقتی که

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \varepsilon_1(\Delta x,\Delta y) = \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \varepsilon_2(\Delta x,\Delta y) = 0$$

همچنین تابع f را در ناحیه R مشتق پذیر گوییم هرگاه در هر نقطه از آن مشتق پذیر باشد.

مثال: نمو تابع $f(x,y)=3x-xy^2$ را در نقطه (x_0,y_0) بدست آورید و سپس نشان دهید این تابع در هر نقطه از $\mathbb{R}^2$ مشتق پذیر است.

$$\Delta f(x_0,y_0) = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)$$

$$= 3(x_0+\Delta x) - (x_0+\Delta x)(y_0+\Delta y)^2 - (3x_0 - x_0 y_0^2)$$

$$= 3x_0 + 3\Delta x - x_0 y_0^2 - y_0^2\Delta x - 2x_0 y_0 \Delta y - 2y_0 \Delta x \Delta y - x_0(\Delta y)^2 - \Delta x(\Delta y)^2 - 3x_0$$

$$+ x_0 y_0^2 = 3\Delta x - y_0^2\Delta x - 2x_0 y_0 \Delta y - 2y_0\Delta x\Delta y - x_0(\Delta y)^2 - \Delta x(\Delta y)^2$$

$$= \underbrace{(3-y_0^2)}_{f_x(x_0,y_0)}\Delta x \underbrace{-2x_0 y_0}_{f_y(x_0,y_0)}\Delta y + \underbrace{(-2y_0\Delta y - (\Delta y)^2)}_{\varepsilon_1}\Delta x + \underbrace{(-x_0\Delta y)}_{\varepsilon_2}\Delta y$$

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \varepsilon_1(\Delta x,\Delta y) = \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \varepsilon_2(\Delta x,\Delta y) = 0$$

لذا f در (x_0,y_0) مشتق پذیر است.

تذکر: اگر f در P_0 مشتق پذیر باشد یک بردار قائم بر $z=f(x,y)$ در نقطه $P_0=(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$

برابر است با: $\vec{n}=f_x(x_0,y_0)\hat{i}+f_y(x_0,y_0)\hat{j}-\hat{k}$

مثال: بردار قائم و معادلات صفحه مماس و خط قائم به نمودار $Z=\sin(xy)$ در $x=\frac{\pi}{3}$ و

$y=-1$ را بیابید.

حل: نقطه روی نمودار دارای مختصات $(\pi/3, -1, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ است.

$$\frac{\partial Z}{\partial x}=y\cos(xy),\quad \frac{\partial Z}{\partial y}=x\cos(xy),\quad \left.\frac{\partial Z}{\partial y}\right|_{(\pi/3,-1)}=\pi/6,\quad \left.\frac{\partial Z}{\partial x}\right|_{(\pi/3,-1)}=-1/2$$

لذا بردار قائم برابر است با $\vec{n}=-1/2\,\hat{i}+\pi/6\,\hat{j}-\hat{k}$

صفحه مماس: $-1/2(x-\pi/3)+\pi/6(y+1)-(Z+\frac{\sqrt{3}}{2})=0$

خط قائم: $$\frac{x-\pi/3}{-\frac{1}{2}}=\frac{y+1}{\frac{\pi}{6}}=\frac{Z+\frac{\sqrt{3}}{2}}{-1}$$

مثال: کدام صفحه افقی (موازی صفحه xy) بر سطح $Z=x^2-4yx-2y^2+12x-12y-1$

مماس است و نقطه تماس کجاست؟

حل: اگر صفحه مماس به صورت افقی باشد، معادله آن به صورت $Z=k$ است، یعنی باید

$\frac{\partial Z}{\partial x}$ و $\frac{\partial Z}{\partial y}$ هردو صفر باشند:

$$\frac{\partial Z}{\partial x}=2x-4y+12=0$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y}=-4x-4y-12=0$$

جواب این معادلات $x=-4$ و $y=1$ است. برای این مقادیر $Z=-31$ بدست می‌آید

پس صفحه مماس برابر $Z=-31$ در نقطه $(-4,1,-31)$ است.

مثال: نشان دهید تابع

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

در مبدا مشتق پذیر نیست گرچه مشتق های جزئی $f_x(0,0)$ و $f_y(0,0)$ هردو موجودند.

حل: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=mx}} \dfrac{mx^2}{x^2+m^2x^2} = \dfrac{m}{1+1}$

که به m بستگی دارد، لذا تابع f در $(0,0)$ پیوسته نیست، پس نمی‌تواند در $(0,0)$ مشتق پذیر باشد. اما

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h\times 0}{h^2+0}-0}{h} = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0\times h}{0+h^2}-0}{h} = 0$$

مثال: مقدار تابع $f(x,y)=\sqrt{2x^2+e^{2y}}$ را در $(2.2,-0.2)$ تقریب بزنید.

$$f_x(x,y) = \frac{2x}{\sqrt{2x^2+e^{2y}}} \quad , \quad f_y(x,y) = \frac{e^{2y}}{\sqrt{2x^2+e^{2y}}}$$

با خطی سازی f در نقطه $(2,0)$ داریم:

$$\begin{aligned} L(x,y) &= f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) \\ &= f(2,0) + f_x(2,0)(x-2) + f_y(2,0)(y-0) \\ &= 3 + \frac{4}{3}(x-2) + \frac{1}{3}y \end{aligned}$$

$$f(2.2,-0.2) \simeq L(2.2,-0.2) = 3 + \frac{4}{3}(2.2-2) + \frac{1}{3}(-0.2) = 3.2$$

مثال: نشان دهید که تابع

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

در $(0,0)$ مشتق پذیر است.

حل: ابتدا $f_1(0,0)$ را پیدا می‌کنیم: $f_1(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{0-0}{h} = 0$

اگر $(x,y)\neq(0,0)$، $f_1(x,y)$ را می‌توان به سادگی محاسبه کرد:

$$f_1(x,y) = \frac{2xy^2(x^2+y^2) - 2x(x^2y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2}$$

لذا

$$f_1(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

به همین ترتیب می توان $f_2(x,y)$ را نیز محاسبه کرد:

$$f_2(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2x^4y}{(x^2+y^2)^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$f_1(x,y)$ و $f_2(x,y)$ در هر همسایگی از $(0,0)$ تعریف شده و موجودند، حال کافیست

پیوستگی آنها را در $(0,0)$ بررسی کنیم. ابتدا ثابت می کنیم f_1 در $(0,0)$ پیوسته است:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2}=\lim_{r\to 0}\frac{2r\cos(\theta)\,(r\sin(\theta))^4}{(r^2)^2}$$

$$=\lim_{r\to 0} 2r\times\underbrace{\cos(\theta)\sin^4(\theta)}_{F(\theta)\ \text{کراندار}}=0$$

لذا f_1 در $(0,0)$ پیوسته است.

به همین ترتیب f_2 هم در $(0,0)$ پیوسته است،

بنابراین f در $(0,0)$ مشتق پذیر است.

تعریف: اگر f تابعی دو متغیره از x و y باشد و f تابعی مشتق پذیر در (x,y) باشد،

در این صورت دیفرانسیل کل f تابعی است که با df نمایش داده می شود و به صورت زیر

تعریف می گردد:

$$df(x,y,\Delta x,\Delta y)=\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$$

اگر $z=f(x,y)$ در این صورت:

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$$

اگر $z=x$ داریم $dx=\Delta x$ و اگر $z=y$ داریم $dy=\Delta y$ پس

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$$

این تعریف می تواند به توابع سه یا n متغیره تعمیم یابد مثلاً اگر $w=f(x,y,z)$ داریم

$$dw=\frac{\partial w}{\partial x}dx+\frac{\partial w}{\partial y}dy+\frac{\partial w}{\partial z}dz$$

در حالت کلی اگر $w=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$:

$$dw=\frac{\partial w}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial w}{\partial x_2}dx_2+\dots+\frac{\partial w}{\partial x_n}dx_n$$

مثال: دیفرانسیل کل $z = 2x\sin(y) - 3x^2$ را بیابید.

حل:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

$$= (2\sin(y) - 6x)\,dx + 2x\cos(y)\,dy$$

مثال: دیفرانسیل کل $w = x^2 + y^2 + z^2$ را بیابید.

حل:

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz$$

$$= 2x\,dx + 2y\,dy + 2z\,dz$$