مثال: دیفرانسیل کل $z = 2x\sin(y) - 3x^2$ را بیابید.

حل:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

$$= (2\sin(y) - 6x)\, dx + 2x\cos(y)\, dy$$

مثال: دیفرانسیل کل $w = x^2 + y^2 + z^2$ را بیابید.

حل:

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz$$

$$= 2x\, dx + 2y\, dy + 2z\, dz$$

تعمیم:

تعریف: اگر f یک تابع n متغیره به فرم $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ باشد، در اینصورت نمو f به صورت زیر تعریف می شود:

$$\Delta f = f(\bar{x}_1 + \Delta x_1, \bar{x}_2 + \Delta x_2, \dots, \bar{x}_n + \Delta x_n) - f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$$

تعریف: اگر f یک تابع از n متغیر $x_1, \dots, x_n$ باشد و نمو f در $\bar{P} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ را بصورت زیر بتوان نوشت:

$$\Delta f = f_1(\bar{P})\Delta x_1 + f_2(\bar{P})\Delta x_2 + \dots + f_n(\bar{P})\Delta x_n$$
$$+ \varepsilon_1 \Delta x_1 + \varepsilon_2 \Delta x_2 + \dots + \varepsilon_n \Delta x_n$$

که ε_i ها تابعی از $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ هستند و

$$\lim_{(\Delta x_1, \dots, \Delta x_n) \to (0, 0, \dots, 0)} \varepsilon_i(\Delta x_1, \dots, \Delta x_n) = 0$$

در اینصورت f را در $\bar{P}$ مشتق پذیر گوییم.

تذکر: اگر $w = f(x, y, z)$ در (x_0, y_0, z_0) مشتق پذیر باشد، در اینصورت فضای مماس در این نقطه قابل تعریف است.

مشتقات جهتی و گرادیان:

تعریف: فرض کنید $\hat{u} = u_1\hat{i} + u_2\hat{j}$ بردار یکه‌ای باشد، در این صورت مشتق جهتی تابع $f(x,y)$ در جهت $\hat{u}$ به عنوان نرخ تغییرات تابع f در جهت $\hat{u}$ در نقطه (x,y) به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$D_{\hat{u}} f(a,b) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+hu_1, b+hu_2) - f(a,b)}{h}$$

تذکر:

$$D_{\hat{u}} f(a,b) = \frac{d}{dt} f(a+tu_1, b+tu_2)\Big|_{t=0}$$

قضیه: اگر f یک تابع مشتق‌پذیر از x و y باشد، در این صورت مشتق جهتی f در جهت بردار یکه $\hat{u} = u_1\hat{i} + u_2\hat{j}$ به صورت زیر است:

$$D_{\hat{u}} f(x,y) = u_1 f_x(x,y) + u_2 f_y(x,y)$$

مثال: مشتق جهتی تابع $f(x,y) = x^2\sin(2y)$ را در جهت بردار $\vec{V} = 3\hat{i} - 4\hat{j}$ در نقطه $(1, \frac{\pi}{2})$ بیابید.

حل: توجه کنید که بردار $\vec{V}$ یکه نیست، پس ابتدا $\hat{V}$ را بدست می‌آوریم:

$$\hat{V} = \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|} = \frac{3\hat{i} - 4\hat{j}}{5} = \frac{3}{5}\hat{i} - \frac{4}{5}\hat{j}$$

$$\Rightarrow D_{\hat{V}} f(x,y) = \frac{3}{5}(2x\sin(2y)) - \frac{4}{5}(2x^2\cos(2y))$$

$$D_{\hat{V}} f(1, \frac{\pi}{2}) = \frac{3}{5}(2\sin\pi) + 2\cos(\pi)(-\frac{4}{5}) = \frac{8}{5}$$

تعریف (گرادیان) : اگر $z = f(x,y)$ تابعی از x و y باشد بطوریکه f_x و f_y هر دو موجود باشند، در اینصورت گرادیان تابع f، که با $\nabla f(x,y)$ «دل f» نمایش داده می‌شود، برداری است که بصورت روبه‌رو تعریف می‌گردد:

$$\nabla f(x,y) = f_x(x,y)\,\hat{i} + f_y(x,y)\,\hat{j}$$

گاهی گرادیان f را با $\text{grad}\, f$ نیز نمایش می‌دهند. توجه کنید که گرادیان f یک بردار در صفحه است و نه در فضا.

مثال: گرادیان تابع $f(x,y) = y\,Ln(x) + xy^2$ را در نقطه $(1,2)$ بیابید.

$$f_x(x,y) = \frac{y}{x} + y^2 \quad , \quad f_y(x,y) = Ln(x) + 2xy$$

$$\nabla f = f_x(x,y)\,\hat{i} + f_y(x,y)\,\hat{j}$$

$$= \left(\frac{y}{x} + y^2\right)\hat{i} + \left(Ln(x) + 2xy\right)\hat{j}$$

$$\nabla f(1,2) = 6\,\hat{i} + 4\,\hat{j}$$

محاسبه مشتق جهتی به کمک گرادیان:

قضیه: اگر $\hat{u} = u_1\hat{i} + u_2\hat{j}$ برداری یکه باشد و f یک تابع مشتق‌پذیر از x و y باشد. در اینصورت

$$D_{\hat{u}} f(x,y) = \hat{u} \cdot \nabla f(x,y)$$

مثال: مشتق جهتی تابع f را در جهت‌های زیر در نقطه $(1,0)$ حساب کنید.

$$f(x,y) = y^4 + 2xy^3 + x^2y^2 \quad , \quad u = \hat{i} + 2\hat{j} \quad , \quad v = -2\hat{i} + \hat{j}$$

$$\hat{u} = \frac{\hat{i} + 2\hat{j}}{\sqrt{5}} \qquad \nabla f(x,y) = (2y^3 + 2xy^2)\hat{i} + (4y^3 + 6xy^2 + 2x^2y)\hat{j}$$

$$D_{\hat{u}} f(0,1) = \frac{\hat{i} + 2\hat{j}}{\sqrt{5}} \cdot (2\hat{i} + 4\hat{j}) = 2\sqrt{5}$$

$$\hat{v} = -\frac{2\hat{i} + \hat{j}}{\sqrt{5}}$$

$$D_{\hat{v}} f(0,1) = \left(\frac{-2\hat{i} + \hat{j}}{\sqrt{5}}\right) \cdot (2\hat{i} + 4\hat{j}) = 0$$

کاربرد گرادیان:

قضیه: (خواص گرادیان) اگر f در (x,y) مشتق پذیر باشد

1) اگر $\nabla f(x,y) = 0$، در اینصورت $D_{\hat{u}} f(x,y)$ برای هر جهت $\hat{u}$ برابر صفر است.

2) جهتی که تابع f در آن جهت بیشترین نرخ افزایش را دارد $\nabla f(x,y)$ است و بیشینه $D_{\hat{u}} f(x,y)$ برابر است با $|\nabla f(x,y)|$.

3) جهتی که تابع f در آن جهت بیشترین نرخ کاهش را دارد $-\nabla f$ است و کمترین مقدار $D_{\hat{u}} f(x,y)$ برابر است با $-|\nabla f(x,y)|$ است.

قضیه: اگر $f(x,y)$ در نقطه (x_0,y_0) مشتق پذیر باشد و $\nabla f(x_0,y_0) \neq 0$ باشد، در اینصورت $\nabla f(x_0,y_0)$ بر منحنی تراز f که از نقطه (x_0,y_0) می‌گذرد، عمود است.

مثال: جهت هایی را بیابید که در آن تابع $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ در نقطه $(1,1,1)$ بیشترین نرخ افزایش یا کاهش را دارد.

$$\nabla f = 2\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}$$

$$|\nabla f| = 2\sqrt{3}$$

بیشترین نرخ افزایش $\hat{u}=\dfrac{\nabla f}{|\nabla f|}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})$

بیشترین نرخ کاهش: $-\hat{u}$

مشتق جهتی و گرادیان توابع سه متغیره:

اگر f تابعی از سه متغیر x و y و z با مشتقات جزئی اول پیوسته باشد، مشتق جهتی f در جهت بردار یکه $\hat{u}=a\hat{i}+b\hat{j}+c\hat{k}$ به صورت:

$$D_{\hat{u}} f(x,y,z) = a f_x(x,y,z) + b f_y(x,y,z) + c f_z(x,y,z)$$

تعریف می شود، همچنین گرادیان f به فرم زیر تعریف می گردد:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}$$

خواص گرادیان:

1) $D_{\hat{u}} f(x,y,z) = \nabla f \cdot \hat{u}$

2) اگر $\nabla f(x,y,z)=0$ در اینصورت $D_{\hat{u}} f(x,y,z)$ برای هر $\hat{u}$ برابر صفر است.

3) تابع f در جهت ∇f بیشترین نرخ افزایش و در جهت $-\nabla f$ بیشترین نرخ کاهش را دارد.

قضیه: اگر f در نقطه (x_0, y_0, z_0) مشتق پذیر و $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq 0$، در این صورت $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ بر رویه تراز گذرا از (x_0, y_0, z_0) عمود است.

با توجه به قضیه بالا برای بدست آوردن صفحه مماس $z = f(x, y)$، ابتدا آنرا بصورت $g(x, y, z) = z - f(x, y) = 0$ نوشت. بنابراین $z = f(x, y)$ یک رویه تراز g است و ∇g بردار قائم بر رویه $z = f(x, y)$. لذا می توان به کمک آن معادله صفحه مماس و خط قائم را نوشت.

$$\nabla g = -f_x i - f_y \hat{j} + \hat{k}$$

صفحه مماس

$$(z - f(x_0, y_0)) - f_x(x_0, y_0)(x - x_0) - f_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$$

مثال: معادله صفحه مماس و خط قائم بر رویه

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z - 9 = 0$$

را در نقطه $(1, 2, 4)$ بیابید.

$$\nabla f(x, y, z) = 2x\hat{i} + 2y\hat{j} + \hat{k}$$

$$\nabla f(1, 2, 4) = 2\hat{i} + 4\hat{j} + k$$

صفحه مماس: $2(x - 1) + 4(y - 2) + (z - 4) = 0$

خط قائم: $x = 1 + 2t \,,\; y = 2 + 4t \,,\; z = 4 + t$

مثال: بردار مماس به منحنی فصل مشترک دو سطح $z = x^2 - y^2$ و $xyz + 30 = 0$ را در نقطه $(-3, 2, 5)$ پیدا کنید.

حل: مختصات نقطه ارائه شده در معادلات هر دو سطح صدق می کند، بنابراین، این نقطه روی منحنی فصل مشترک دو سطح قرار می گیرد. یک بردار مماس بر این منحنی در این نقطه عمود به نرمال های هر دو سطح می شود. یعنی نسبت به بردارهای

$$\vec{n}_1 = \nabla (x^2 - y^2 - z) \Big|_{(-3,2,5)} = 2x\hat{i} - 2y\hat{j} - \hat{k} \Big|_{(-3,2,5)} = -6\hat{i} - 4\hat{j} - \hat{k}$$

$$\vec{n}_2 = \nabla (xyz + 30) \Big|_{(-3,2,5)} = (yz\hat{i} + xz\hat{j} + xy\hat{k}) \Big|_{(-3,2,5)} = 10\hat{i} - 15\hat{j} - 6\hat{k}$$

بنابراین، برای بردار مماس آ می توانیم از حاصلضرب خارجی این قائم ها استفاده می کنیم:

$$\vec{T} = n_1 \times n_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -6 & -4 & -1 \\ 10 & -15 & -6 \end{vmatrix} = 9\hat{i} - 46\hat{j} - 130\hat{k}$$

دترمینان های ژاکوبین و قضیه تابع ضمنی:

دترمینان ژاکوبین (یا به طور ساده ژاکوبین) دو تابع $u = u(x,y)$ و $V = V(x,y)$ نسبت به دو متغیر x و y، دترمینان

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}$$

است. به طور مشابه، ژاکوبین دو تابع $F(x,y,\dots)$ و $G(x,y,\dots)$ نسبت به متغیرهای x و y دترمینان زیر می باشد:

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_1 & F_2 \\ G_1 & G_2 \end{vmatrix}$$

این تعریف می‌تواند به صورت بدیهی تعمیم داده شود تا ژاکوبین n تابع را نسبت به n متغیر ارائه دهد. مثلاً اگر $F(x,y,z)$ ، $G(x,y,z)$ و $H(x,y,z)$ در این صورت داریم:

$$\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,y,z)}=\begin{vmatrix} F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix}$$

قضیه تابع ضمنی:

دستگاه n معادله با $n+m$ متغیر زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} F_{(1)}(x_1,x_2,\dots,x_m,y_1,y_2,\dots,y_n)=0 \\ F_{(2)}(x_1,x_2,\dots,x_m,y_1,y_2,\dots,y_n)=0 \\ \vdots \\ F_{(n)}(x_1,x_2,\dots,x_m,y_1,y_2,\dots,y_n)=0 \end{cases}$$

و یک نقطه $P_0=(a_1,\dots,a_m,b_1,\dots,b_n)$ که در دستگاه فوق صدق کند. همچنین فرض کنید هر کدام از $F_{(i)}$ ها مشتقات جزئی اول پیوسته نسبت به هر کدام از x_j ها و y_k ها نزدیک P_0 دارند. همچنین فرض کنید.

$$\left.\frac{\partial(F_{(1)},F_{(2)},\dots,F_{(n)})}{\partial(y_1,y_2,\dots,y_n)}\right|_{P_0}\neq 0$$

در این صورت دستگاه بالا می‌تواند برای $y_1,\dots,y_n$ به صورت توابعی از $x_1,\dots,x_m$ نزدیک P_0 حل شود. یعنی توابعی مانند

$$\varphi_1(x_1,\dots,x_m),\dots,\varphi_n(x_1,\dots,x_m)$$

چنان موجودند که $\varphi_j(a_1,\dots,a_m)=b_j \quad j=1,2,\dots,n$

و همچنین $F_{(1)}(x_1, \dots, x_m, \varphi_1(x_1, \dots, x_m), \dots, \varphi_n(x_1, \dots, x_m)) = 0$

$\vdots$

$F_{(n)}(x_1, \dots, x_m, \varphi_1(x_1, \dots, x_m), \dots, \varphi_n(x_1, \dots, x_m)) = 0$

برای همه $(x_1, \dots, x_n)$ های به قدر کافی نزدیک به P_0 برقرار است. علاوه

$$\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} = -\frac{\dfrac{\partial(F_{(1)}, \dots, F_{(n)})}{\partial(y_1, \dots, x_j, \dots, y_n)}}{\dfrac{\partial(F_{(1)}, \dots, F_{(n)})}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)}}$$

مثال: نشان دهید که دستگاه معادلات

$$\begin{cases} xy^2 + xzu + yv^2 = 3 \\ x^3yz + 2xv - u^2v^2 = 2 \end{cases}$$

می توان برای u و v به عنوان تابعی از x, y, z حول نقطه

$P_0 = (x, y, z, u, v) = (1, 1, 1, 1, 1)$ قابل حل بوده و سپس مقدار $\frac{\partial v}{\partial y}$

را برای $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ بیابید.

$$\begin{cases} F(x, y, z, u, v) = xy^2 + xzu + yv^2 - 3 \\ G(x, y, z, u, v) = x^3yz + 2xv - u^2v^2 - 2 \end{cases}$$

$$\left.\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)}\right|_{P_0} = \left.\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}\right|_{P_0} = \left.\begin{vmatrix} xz & 2yv \\ -2uv^2 & 2x - 2u^2v \end{vmatrix}\right|_{P_0}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

پس طبق قضیه تابع ضمنی v و u برحسب x و y و z حول P_0 قابل حل هستند.

$$\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_{x,z} = \frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}$$

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\Big|_{P_0} = \begin{vmatrix} xz & 2xy+v^2 \\ -2uv^2 & x^3z \end{vmatrix}_{P_0} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 7$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_{x,z}\Big|_{P_0} = -\frac{7}{4}$$

مثال: اگر $v = v(x,y)$ ، $u = u(x,y)$ و $z = z(x,y)$ و اگر

$u+v=y$ ، $u^2+v^2=x$ و $u^3+2v^3=z$ مطلوبست $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$.

$$\begin{cases} F_{(1)}: u+v-y=0 \\ F_{(2)}: u^2+v^2-x=0 \\ F_{(3)}: u^3+2v^3-z=0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial(F_{(1)},F_{(2)},F_{(3)})}{\partial(u,v,z)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2u & 2v & 0 \\ 3u^2 & 6v^2 & -1 \end{vmatrix} = -2(v-u)$$

$$\frac{\partial(F_{(1)}, F_{(2)}, F_{(3)})}{\partial(u, v, x)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2u & 2v & -1 \\ 3u^2 & 6v^2 & 0 \end{vmatrix} = 6v^2 - 3u^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -\frac{6v^2-3u^2}{-2(v-u)} = \frac{6v^2-3u^2}{2(v-u)}$$

بهمین ترتیب می توان $\frac{\partial z}{\partial y}$ را نیز محاسبه کرد.

مثال : اگر $x^2y^2z^3 = x+2y+z$ مقدار $\frac{\partial z}{\partial x}$ ، $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ را محاسبه کنید.

$$F: x^2y^2z^3 - x - 2y - z = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{2xy^2z^3-1}{3z^2x^2y^2-1}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{-\left[2y^2z^3 + 6xy^2z^2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right](3z^2x^2y^2-1) - (2xy^2z^3-1)\left[6z^2xy^2 + 6zxy^2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right]}{(3z^2x^2y^2-1)^2}$$