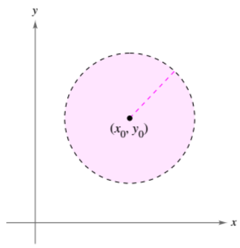
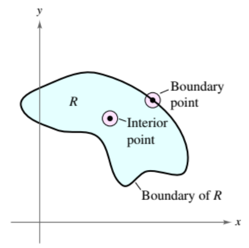
مقادیر اکسترمم :

ابتدا به یادآوری برخی مفاهیم می‌پردازیم. فرض کنید ناحیه R یک مجموعه از نقاط در صفحه باشد.

نقطه (x_0,y_0) در R را یک نقطه درونی از R گوییم هرگاه، یک δ-همسایگی حول نقطه (x_0,y_0) چنان موجود باشد که "کاملاً" درون ناحیه R قرار گیرد. اگر هر نقطه متعلق به ناحیه R یک نقطه درونی باشد، R را یک ناحیه باز می‌گوییم. نقطه (x_0,y_0) را یک نقطه مرزی ناحیه R گوییم هرگاه هر دیسک باز حول نقطه (x_0,y_0) شامل نقاطی از ناحیه R و نقاطی بیرون R باشد. اگر R شامل همه نقاط مرزی خود باشد، R را یک ناحیه بسته می‌گوییم. اگر ناحیه‌ای مانند R را بتوان درون یک دیسک بسته قرار داد، آنرا یک ناحیه کراندار گوییم.



An open disk



The boundary and interior points of a region R

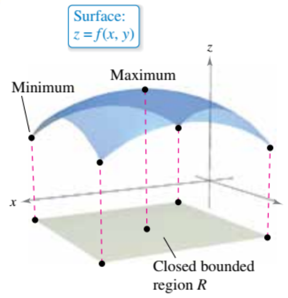
تعریف: گوییم تابع دو متغیره f بر قلمرو خود D دارای ماکزیمم مطلق است هرگاه نقطه‌ای چون (x_0,y_0) در D موجود باشد که برای هر (x,y) متعلق به D داشته باشیم

$$f(x,y) \le f(x_0,y_0)$$

در چنین حالتی $f(x_0,y_0)$ ماکزیمم مطلق تابع f بر D است. به همین ترتیب گوییم تابع f بر قلمرو خود دارای مینیمم مطلق است هرگاه نقطه‌ای چون (x_0,y_0) در D موجود باشد که برای هر (x,y) متعلق به D داشته باشیم

$$f(x_0,y_0) \le f(x,y)$$

قضیه: فرض کنید f یک تابع دو متغیره پیوسته باشد که روی ناحیه بسته و کراندار R تعریف شده است. در این صورت دست کم یک نقطه در R هست که f در آن ماکزیمم مطلق دارد و دست کم یک نقطه در R هست که f در آن مینیمم مطلق دارد.



R contains point(s) at which $f(x, y)$ is a minimum and point(s) at which $f(x, y)$ is a maximum.

تعریف: فرض کنید تابع f روی ناحیه R شامل نقطه (x_0,y_0) تعریف شده باشد. در این صورت گوییم تابع f در نقطه (x_0,y_0) دارای ماکزیمم نسبی است هرگاه دیسک بازی حول نقطه (x_0,y_0) چنان موجود باشد که برای تمام (x,y) های متعلق به آن

$$f(x,y) \le f(x_0,y_0)$$

و گوییم تابع f در نقطه (x_0,y_0) دارای مینیمم نسبی است هرگاه دیسک بازی حول نقطه (x_0,y_0) چنان موجود باشد که برای تمام (x,y) های متعلق به آن

$$f(x,y) \ge f(x_0,y_0).$$

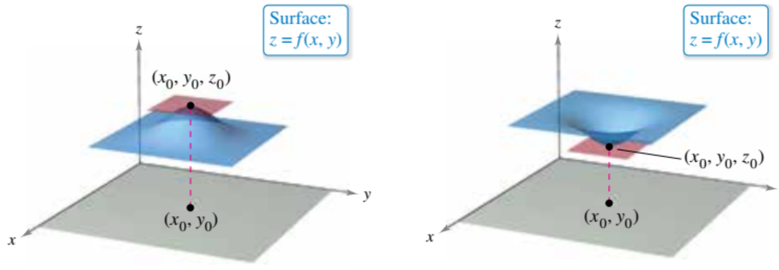
تذکر: به مینیمم و ماکزیمم نسبی اکسترمم نسبی و به مینیمم مطلق و ماکزیمم مطلق اکسترمم مطلق می گوییم.

تعریف (نقطه بحرانی): نقطه (a,b) از دامنه تابع f یک نقطه بحرانی f نامیده می شود اگر یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

1) $f_x(a,b)=0$ و $f_y(a,b)=0$ $\quad (\nabla f(a,b)=0)$

2) $f_x(a,b)$ یا $f_y(a,b)$ موجود نباشد.

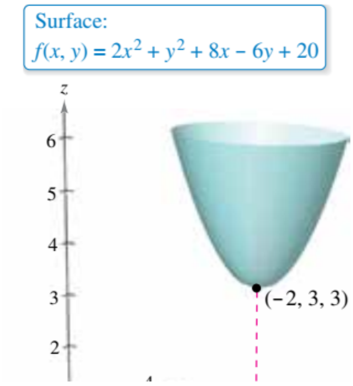
قضیه: اگر f در نقطه (a,b) دارای اکسترمم نسبی باشد، در این صورت (a,b) یک نقطه بحرانی برای تابع f است.



Relative maximum Relative minimum

مثال: اکسترمم های نسبی تابع $f(x,y)=2x^2+y^2+8x-6y+20$ را تعیین کنید.

حل: ابتدا مقادیر بحرانی f را پیدا می‌کنیم:



$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 4x+8=0 \\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y-6=0 \end{cases}$$

با حل این دستگاه، تنها نقطه بحرانی به صورت $(-2,3)$ به دست می‌آید.

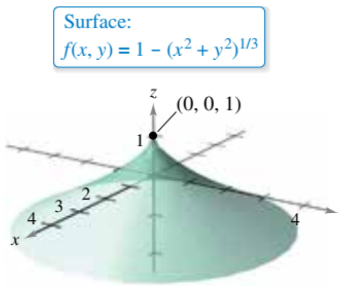
با مربع کامل کردن در f داریم:

$$f(x,y) = 2(x+2)^2 + (y-3)^2 + 3 \geq 3$$

لذا در نقطه $(-2,3)$ تابع f مقدار مینیمم نسبی خود را می‌گیرد. و $f(-2,3)=3$ مقدار مینیمم مطلق f است.

مثال: اکسترمم های نسبی تابع $f(x,y)=1-(x^2+y^2)^{1/3}$ را به دست آورید.

حل:



$f_x(x, y)$ and $f_y(x, y)$ are undefined at $(0, 0)$.

$$f_x = -\frac{2x}{3(x^2+y^2)^{2/3}} \quad , \quad f_y = -\frac{2y}{3(x^2+y^2)^{2/3}}$$

با توجه به مشتقات جزئی f، این مشتقات فقط در نقطه $(0,0)$ موجود نیستند و بعلاوه هیچ جا در صفحه f_x و f_y همزمان صفر نشوند.

پس تنها نقطه بحرانی $(0,0)$ است. از طرفی $f(x,y)=1-(x^2+y^2)^{1/3}<1$ لذا

f در نقطه $(0,0)$ ماکزیمم نسبی دارد.

قضیه (آزمون مشتق جزئی دوم) فرض کنید f یک تابع دو متغیره با مشتقات جزئی مرتبه دوم پیوسته در یک همسایگی باز حول نقطه (a,b) باشد. همچنین فرض کنید $\nabla f(a,b)=\vec{0}$ یعنی $f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$. اگر

$$d=\begin{vmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b) \\ f_{yx}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{vmatrix}$$

در این صورت

1) اگر $d>0$ و $f_{xx}(a,b)>0$، تابع f در (a,b) مینیمم نسبی دارد.

2) اگر $d>0$ و $f_{xx}(a,b)<0$، تابع f در (a,b) ماکزیمم نسبی دارد.

3) اگر $d<0$، در این صورت $(a,b,f(a,b))$ یک نقطه زینی f است.

4) اگر $d=0$ آزمون جواب نمی‌دهد.

مثال ۵ به کمک آزمون مشتق دوم، اکسترمم نسبی تابع $f(x,y)=-x^3+4xy-2y^2+1$ را بیابید.

$$f_x=-3x^2+4y\,,\quad f_y=4x-4y$$

$$\begin{cases} -3x^2+4y=0 \\ 4x-4y=0 \Rightarrow x=y \end{cases} \qquad -3x^2+4x=0 \quad x(-3x+4)=0 \begin{cases} x=0 \\ x=\frac{4}{3} \end{cases}$$

بنابراین چون مشتقات جزئی همه جا موجود هستند، نقاط بحرانی به صورت $(0,0)$ و $(\frac{4}{3},\frac{4}{3})$ است. ابتدا به بررسی نقطه $(0,0)$ می‌پردازیم.

$$f_{xx}=-6x\,,\quad f_{xy}=4\,,\quad f_{yy}=-4$$

$$\Rightarrow d=\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 4 & -4 \end{vmatrix}=-16<0$$

پس نقطه $(1,0,0)$ نقطه زینی است. حال برای نقطه $(\frac{4}{3},\frac{4}{3})$ داریم:

$$d=\begin{vmatrix} -8 & 4 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = 32-16=16>0$$

از طرفی $f_{xx}(\frac{4}{3},\frac{4}{3})<0$ پس f در $(\frac{4}{3},\frac{4}{3})$ ماکزیمم نسبی دارد.

مثال: نقاط بحرانی تابع $f(x,y)=x^4+y^4-4xy+1$ را یافته و دسته بندی کنید:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 4x^3-4y=0 \Rightarrow x^3-y=0 \Rightarrow y=x^3 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 4y^3-4x=0 \end{cases}$$

با قرار دادن $y=x^3$ در معادله دوم داریم:

$$0=x^9-x=x(x^8-1)=x(x^4-1)(x^4+1)=x(x^2-1)(x^2+1)(x^4+1)$$

$$\Rightarrow x=0,1,-1$$

لذا نقاط بحرانی عبارتند از $(0,0)$ ، $(1,1)$، $(-1,-1)$. حال هر یک از نقاط را بررسی می کنیم:

$$f_{xx}=12x^2, \quad f_{yy}=12y^2 \quad f_{xy}=-4$$

$$d=\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} = 144x^2y^2-16$$

$d(0,0)=-16<0$ لذا $(0,0)$ نقطه زینی است

$d(1,1)=128>0$, $f_{xx}(1,1)=12>0$ لذا f در $(1,1)$ مینیمم موضعی دارد.

$d(-1,-1)=128>0$, $f_{xx}(-1,-1)=12>0$ لذا f در $(-1,-1)$ مینیمم موضعی دارد.

مقادیر اکسترمم توابع پیوسته روی نواحی بسته و کراندار: قبلاً دیدیم که اگر f یک تابع پیوسته روی ناحیه بسته و کراندار R باشد، در این صورت روی R ماکسیمم و مینیمم مطلق دارد.

برای یافتن اکسترمم های مطلق تابع f روی ناحیه R ابتدا نقاط بحرانی f در R را یافته و مقادیر f را در این نقاط به دست می آوریم. سپس اکسترمم های تابع f را روی مرز R به دست می آوریم. بزرگترین مقدار ماکسیمم مطلق و کمترین مقدار مینیمم مطلق تابع f روی R است.

مثال: مقادیر ماکسیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x,y)=2xy$ را روی قرص $x^2+y^2\leq 4$ بیابید.

چون f پیوسته و ناحیه $R: x^2+y^2\leq 4$ یک ناحیه بسته و کراندار است تابع f روی R ماکسیمم و مینیمم مطلق دارد. ابتدا نقاط بحرانی f را درون R می یابیم:

$$f_x = 2y = 0\ ,\quad f_y = 2x = 0$$

لذا نقط بحرانی f نقطه $(0,0)$ است. حال باید مقدار f را روی مرز در نظر بگیریم. مرز ناحیه دایره $x^2+y^2=4$ است. برای یافتن اکسترمم های f روی دایره، ابتدا دایره را پارامتری می کنیم:

$$x = 2\cos(t),\ y = 2\sin(t)$$

$$g(t)= f(2\cos(t), 2\sin(t)) = 8\cos(t)\sin(t) \qquad -\pi \leq t \leq \pi$$

حال اکسترمم های $g(t)$ را می یابیم:

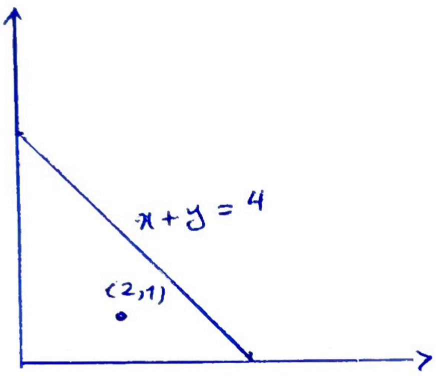
$$g(t) = 4\sin(2t)$$

$$0 = g'(t) = +8\cos(2t) \Rightarrow t = \pm\frac{\pi}{4},\ \pm\frac{3\pi}{4}$$

که ماکسیمم مطلق 4 و مینیمم مطلق 4- را می دهد. از طرفی $f(0,0)=0$ پس f دارای ماکزیمم مطلق 4 در $(\sqrt{2},\sqrt{2})$ و $(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$ و مینیمم مطلق 4- در

$(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ و $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ است.

مثال: مقادیر اکسترمم مطلق تابع $f(x,y)=x^2y\,e^{-(x+y)}$ را روی ناحیه مثلثی T ارائه شده توسط $x\geqslant 0$ ، $y\geqslant 0$ و $x+y\leq 4$ را بیابید.



ابتدا نقاط بحرانی تابع f را پیدا می‌کنیم.

$$f_x = 2xy\,e^{-(x+y)} - x^2y\,e^{-(x+y)} = 0$$

$$f_y = x^2e^{-(x+y)} - x^2y\,e^{-(x+y)} = 0$$

$$\begin{cases} xy(2-x)e^{-(x+y)} = 0 \Rightarrow x=0,\ y=0,\ x=2 \\ x^2(1-y)e^{-(x+y)} = 0 \Rightarrow x=0,\ y=1 \end{cases}$$

لذا نقاط بحرانی $(0,y)$ و $(2,1)$ هستند. که نقطه $(2,1)$ یک نقطه درونی T است و $f(2,1)=\frac{4}{e^3}\simeq 0.199$. مرز T شامل سه پاره خط است که دوتای آنها روی محور xها و yها قرار دارند و مقدار تابع روی آنها برابر صفر است. سومین پاره‌خط به صورت $y=4-x$ است که $0\leqslant x\leqslant 4$. بنابراین مقدار تابع f روی این پاره‌خط برابر است با

$$g(x)=f(x,4-x)=x^2(4-x)e^{-4} \qquad 0\leq x\leq 4$$

$$g'(x)=(8x-3x^2)e^{-4}=0 \Rightarrow x(8-3x)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\frac{8}{3} \end{cases}$$

$$g(0)=0,\ g(4)=0,\ g\left(\frac{8}{3}\right)=\frac{256}{27}e^{-4}\simeq 0.174 < f(2,1)$$

لذا f در $(2,1)$ ماکسیمم مطلق برابر با $\frac{4}{e^3}$ دارد و مقدار مینیمم مطلق f برابر با صفر است.

روش ضرایب لاگرانژ:

فرض کنید بخواهیم اکسترمم های تابع f از سه متغیر x و y و z، تحت قید $g(x,y,z)=0$ را پیدا کنیم. متغیر جدید λ را به نام ضریب لاگرانژ تعریف کرده، و تابع کمکی لاگرانژ L را به صورت

$$L(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)+\lambda g(x,y,z)$$

تشکیل می دهیم. در این صورت مسأله به یافتن نقاط بحرانی تابع F تبدیل می‌شود. یعنی نقاطی چون x,y,z,λ که در آن

$$L_x=L_y=L_z=L_\lambda=0$$

معادلات بالا را می توان به صورت

$$\nabla f=\lambda\nabla g$$

و

$$g(x,y,z)=0$$

خلاصه کرد.

مثال: ماکسیمم حجم جعبه مستطیلی را بیابید که سر نداشته باشد و از $12\,m^2$ مقوا ساخته شده باشد.

$$\max \quad V=xyz$$

$$g(x,y,z)=xy+2yz+2xz-12=0$$

$$L(x,y,z,\lambda)=xyz+\lambda(xy+2yz+2xz-12)$$

$$L_x=yz+\lambda y+2\lambda z=0 \quad (1) \xrightarrow{\times x} xyz+\lambda xy+2\lambda xz=0 \quad (5)$$

$$L_y=xz+\lambda x+2\lambda z=0 \quad (2) \xrightarrow{\times y} xyz+\lambda xy+2\lambda yz=0 \quad (6)$$

$$L_z=xy+2\lambda y+2\lambda x=0 \quad (3) \xrightarrow{\times z} xyz+2\lambda zy+2\lambda xz=0 \quad (7)$$

$$L_\lambda=xy+2yz+2xz-12=0 \quad (4)$$

$$\xrightarrow{(5),(6)} xyz+\lambda xy+2\lambda xz = xyz+\lambda xy+2\lambda yz=0$$

$$\Rightarrow \lambda xz = \lambda yz \Rightarrow x=y$$

[توجه کنید که در بالا $\lambda=0$ قابل قبول نبود چون نتیجه آن $xy=xz=yz=0$ است که در تناقض

با معادله 4 است، همچنین $z=0$ نیز قابل قبول نیست چون در این صورت

حجم مکعب صفر خواهد بود]

$$\xrightarrow{(6),(7)} xyz+\lambda xy+2\lambda yz = xyz+2\lambda zy+2\lambda xz=0$$

$$\Rightarrow \lambda xy = 2\lambda xz \xrightarrow{(x\neq 0)} y=2z$$

حال اگر در معادله (4) قرار دهیم $x=y=2z$ داریم:

$$4z^2+4z^2+4z^2=12 \Rightarrow z=1 \qquad (\text{توجه کنید } z>0)$$

$$\Rightarrow x=2,\ y=2,\ z=1 \qquad \max V = 4$$

مثال: مقادیر اکسترمم تابع $f(x,y)=x^2+2y^2$ را روی دایره $x^2+y^2=1$ بیابید.

حل: به دنبال مقادیری از x، y، z، λ می‌گردیم که

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

$$g(x,y)=0$$

که در اینجا $g(x,y)=x^2+y^2-1$.

$$\begin{cases} 2x\hat{i}+4y\hat{j} = \lambda(2x\hat{i}+2y\hat{j}) \\ x^2+y^2-1=0 \end{cases}$$

$2x = 2\lambda x$ (1) , $x^2+y^2-1=0$ (3)

$4y = 2\lambda y$ (2)

با توجه به معادله (1) $x=0$ یا $\lambda=1$. اگر $x=0$ از معادله (3) داریم $y=\pm 1$.

اگر $\lambda=1$، در این صورت با توجه به معادله (2) باید $y=0$ باشد پس از معادله (3)

داریم $x=\pm 1$. لذا f ممکن است در نقاط $(0,1)$، $(0,-1)$، $(1,0)$ و $(-1,0)$

اکسترمم داشته باشد. لذا مقدار f را در این نقاط محاسبه می کنیم:

$$f(0,1)=2,\quad f(0,-1)=2,\quad f(1,0)=1,\quad f(-1,0)=1$$

بنابراین ماکسیمم مقدار f روی دایره $x^2+y^2=1$ برابر با $f(0,\pm 1)=2$ و مقدار مینیمم

آن $f(\pm 1,0)=1$ است.

مثال: مقادیر اکسترمم تابع $f(x,y)=x^2+2y^2$ را روی دیسک $x^2+y^2\le 1$ بیابید.

حل: توجه کنید که باید مقدار تابع f را در نقاط بحرانی داخل دیسک و مقدار تابع f

روی مرز $x^2+y^2=1$ را محاسبه و مقایسه کنیم تا بتوانیم مقادیر اکسترمم تابع f را بیابیم.

$$\nabla f = 2x\,\hat{i} + 4y\,\hat{j} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

لذا تنها نقطه بحرانی f در این دیسک برابر با $(0,0)$ است. حال با توجه به مثال قبل

مقدار تابع f را در نقطه $(0,0)$ و نقاط $(\pm 1,0)$ و $(0,\pm 1)$ مقایسه می کنیم:

$$f(0,0)=0,\quad f(0,\pm 1)=2,\quad f(\pm 1,0)=1$$

لذا مینیمم مطلق f روی این دیسک صفر و ماکسیمم مطلق آن 2 است.

مثال: کمینه تابع $f(x,y)=x^2+y^2$ روی $g(x,y)=x^2y-16=0$ را بیابید.

$$L=(x^2+y^2)+\lambda(x^2y-16)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}=2x+2\lambda xy=0 \Rightarrow 2x(1+\lambda y)=0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}=2y+\lambda x^2=0 \quad (2),\qquad \frac{\partial L}{\partial \lambda}=x^2y-16=0 \quad (3)$$

$\overset{(1)}{\Longrightarrow} \quad x=0$ یا $\lambda y=-1$

اما $x=0$ در معادله (3) صدق نمی‌کند پس $\lambda y=-1$. با ضرب معادله (2) در y داریم:

$$\overset{(2)\times y}{\Longrightarrow} \quad 2y^2+\lambda y x^2=0 \Rightarrow 2y^2-x^2=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2}\,y$$

با جایگذاری در معادله (3) داریم: $\quad 2y^3-16=0 \Rightarrow y=2$

پس $x=\pm 2\sqrt{2}$

$$f(2\sqrt{2},2)=f(-2\sqrt{2},2)=12$$

مثال: بزرگترین و کوچکترین مقداری که تابع $f(x,y)=xy$ روی $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1$ می‌گیرد چقدر است.

$$L(x,y,\lambda)=xy+\lambda\left(\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}-1\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}=y+\lambda\frac{x}{4}=0 \Rightarrow y=\frac{-\lambda}{4}x \quad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}=x+\lambda y=0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}-1=0 \quad (3)$$

$$\overset{(1),(2)}{\Longrightarrow} \quad x-\frac{\lambda^2}{4}x=0 \Rightarrow x\left(1-\frac{\lambda^2}{4}\right)=0 \Rightarrow x=0 \text{ یا } \frac{\lambda^2}{4}=1$$

اگر $x=0$ طبق (1) $y=0$ که در معادله (3) صدق نمی‌کند پس باید $\dfrac{\lambda^2}{4}=1$.

$$\frac{\lambda^2}{4}=1 \Rightarrow \frac{\lambda}{2}=\pm 1 \Rightarrow \lambda=\pm 2 \Rightarrow y=\pm\frac{1}{2}x$$

به کمک معادله (3) داریم: $\quad \dfrac{x^2}{8}+\dfrac{x^2}{8}-1=0 \Rightarrow 2x^2=8 \Rightarrow x=\pm 2$

پس باید مقدار تابع f را در نقاط $(2,1)$ ، $(2,-1)$ ، $(-2,1)$ ، $(-2,-1)$ محاسبه و مقایسه کنیم: $f(2,1)=2,\ f(2,-1)=-2,\ f(-2,1)=-2,\ f(-2,-1)=2$

لذا ماکسیمم تابع f، 2 و مینیمم آن -2 است.

مثال: کمینه و بیشینه تابع $f(x,y,z)=xy^2z^3$ را روی $x^2+y^2+z^2=1$ بیابید.

$$L(x,y,z,\lambda)=xy^2z^3+\lambda(x^2+y^2+z^2-1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}=y^2z^3+2\lambda x=0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}=2yxz^3+2\lambda y=0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial z}=3xy^2z^2+2\lambda z=0 \qquad (3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=x^2+y^2+z^2=1 \qquad (4)$$

$$\xRightarrow{(1)} \lambda=\frac{-y^2z^3}{2x}\ (5), \quad \xRightarrow{(2)} \lambda=-xz^3\ (6), \quad \xRightarrow{(3)} \lambda=-\frac{3}{2}xy^2z\ (7)$$

$$\xRightarrow{(5),(6)} -\frac{y^2z^3}{2x}=-xz^3 \Rightarrow y^2=2x^2 \qquad (8)$$

$$\xRightarrow{(5),(7)} -\frac{y^2z^3}{2x}=-\frac{3}{2}xy^2z \Rightarrow 3x^2y^2z=y^2z^3 \Rightarrow 3x^2=z^2 \quad (9)$$

$$\xRightarrow{(6),(7)} -xz^3=-\frac{3}{2}xy^2z \Rightarrow z^2=\frac{3}{2}y^2 \quad (10)$$

حال به کمک رابطه (4) داریم:

$$x^2+\underbrace{2x^2}_{(8)}+\underbrace{3x^2}_{(9)}=1$$

$$\Rightarrow x^2=1/6 \Rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{6}}, \quad y^2=1/3 \Rightarrow y=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad z^2=\frac{1}{2} \Rightarrow z=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

روش ضرایب لاگرانژ بیش از یک قید: برای پیدا کردن اکسترمم های تابع $f(x,y,z)$

با قیدهای $g_1(x,y,z)=0$ و $g_2(x,y,z)=0$ قرار می دهیم

$$\nabla f = \lambda \nabla g_1 + \mu \nabla g_2 \ , \ g_1(x,y,z)=0 , \ g_2(x,y,z)=0$$

با حل دستگاه فوق مقادیر x ، y ، z ، μ ، λ را یافته، به دنبال اکسترمم تابع f در بین این مقادیر می گردیم. مشابه قبل می توان تابع کمکی لاگرانژ را به صورت

$$L(x,y,z,\mu,\lambda) = f + \lambda g_1 + \mu g_2$$

تعریف کرد و بعد نقاط بحرانی L را یافت.

مثال: اکسترمم های تابع $f(x,y,z)=xz+yz$ روی فصل مشترک سطوح $yz=2$ و $x^2+z^2=2$ را بیابید.

$$L(x,y,z,\mu,\lambda) = xz+yz+\lambda(x^2+z^2-2)+\mu(yz-2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = z+2\lambda x=0 \quad (1) , \quad \frac{\partial L}{\partial y} = z+\mu z=0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = y+x+2\lambda z+\mu y=0 \quad (3) , \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2+z^2-2=0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu} = yz-2=0 \quad (5)$$

$$\overset{(2)}{\Longrightarrow} z(1+\mu)=0 \Rightarrow \begin{cases} \mu=-1 \\ z=0 \end{cases}$$

$$\overset{(5)}{\Longrightarrow} yz-2=0 \Rightarrow z\neq 0 \Rightarrow y=\frac{2}{z}$$ لذا $\mu=-1$

$$\overset{(1)}{\Longrightarrow} \lambda = -\frac{z}{2x}$$

حال در (3) قرار می دهیم $\mu=-1$ و $\lambda=-\frac{z}{2x}$:

$$y+x-\frac{z^2}{x}-y=0$$

$$\Rightarrow x=\frac{z^2}{x} \Rightarrow x^2=z^2 \quad (6)$$

با قرار دادن (6) در (4) داریم:

$$2z^2 = 2 \Rightarrow z=\pm 1 \Rightarrow x=\pm 1 , \ y=\frac{2}{z}$$

$x = 1, y = 2, z = 1 \Rightarrow f(1,2,1) = 3$

$x = 1, y = -2, z = -1 \Rightarrow f(1,-2,-1) = 1$

$x = -1, y = 2, z = 1 \Rightarrow f(-1,2,1) = 1$

$x = -1, y = -2, z = -1 \Rightarrow f(-1,-2,-1) = 3$

مثال: با استفاده از روش ضرایب لاگرانژ، مینیمم نسبی تابع

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$$

را تحت دو قید $x + y + 2z = 1$ و $3x - 2y + z = -4$

را به‌دست آورید.

$$L(x,y,z,\lambda,\mu) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(3x - 2y + z + 4) + \mu(x + y + 2z - 1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x + 3\lambda + \mu = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 2y - 2\lambda + \mu = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = 2z + \lambda + 2\mu = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 3x - 2y + z + 4 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu} = x + y + 2z - 1 = 0$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} R_5 \to R_5 - \frac{3}{2}R_1 + R_2 - \frac{1}{2}R_3 \\ R_4 \to R_4 - \frac{1}{2}R_1 - \frac{1}{2}R_2 - R_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & -\frac{3}{2} & -4 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccccc} 2 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{47}{6} & -\frac{26}{3} \end{array}\right]$$

$$R_4 \to -\frac{14}{3}R_4 + R_5$$

$$\Rightarrow x=\frac{17}{25},\ y=-\frac{77}{75},\ z=-\frac{28}{75}\ \dots$$

مثال: مقدار ماکسیمم و مینیمم تابع $f(x,y,z)=xy+2z$ را روی دایره‌ای که از تقاطع صفحه $x+y+z=0$ و کره $x^2+y^2+z^2=24$ حاصل می‌شود به دست آورید.

$$L(x,y,z,\lambda,\mu)=(xy+2z)+\lambda(x+y+z)+\mu(x^2+y^2+z^2-24)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}=y+\lambda+2x\mu=0 \quad (1) \qquad , \quad \frac{\partial L}{\partial y}=x+\lambda+2\mu y=0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial z}=2+\lambda+2\mu z=0 \quad (3) \qquad , \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda}=x+y+z=0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu}=x^2+y^2+z^2=24 \quad (5)$$

$$\xrightarrow{(1)-(2)} (y-x)+2\mu(x-y)=0 \Rightarrow (y-x)(1-2\mu)=0 \Rightarrow \begin{cases}\mu=\frac{1}{2}\\ x=y\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}\mu=\frac{1}{2}\overset{(2)}{\Longrightarrow} x+\lambda+y=0\\ \mu=\frac{1}{2}\overset{(3)}{\Longrightarrow} 2+\lambda+z=0\end{array}\right\} \Rightarrow x+y=2+z \quad (6)$$

با قرار دادن (6) در (4) داریم: $2+z+z=0 \Rightarrow z=-1$.

با قرار دادن $z=-1$ در (5) و (6):

$$\overset{(6)}{\Longrightarrow} x+y=1 \quad , \quad \overset{(5)}{\Longrightarrow} x^2+y^2=23$$

$$\underbrace{x^2+y^2}_{23}+2xy=1 \Rightarrow 2xy=-22 \Rightarrow xy=-11$$

$$(x-y)^2=x^2+y^2-2xy=23+22=45$$

$$\Rightarrow (x-y)=\pm 3\sqrt{5},\ x+y=1 \Rightarrow \left(\left(\frac{1+3\sqrt{5}}{2}\right),\left(\frac{1-3\sqrt{5}}{2}\right),-1\right)$$

$$\left(\left(\frac{1-3\sqrt{5}}{2}\right),\left(\frac{1+3\sqrt{5}}{2}\right),-1\right)$$

حالت دوم: اگر $x=y$ پس طبق (4)، $z=-2x$ لذا طبق (5):

$$2x^2+4x^2=24 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2$$

$$(2,2,-4),\ (-2,-2,4)$$