انتگرال های چندگانه:

انتگرال دوگانه: فرض کنید f یک تابع کراندار روی مستطیل D که به صورت زیر تعریف شده

است باشد:

$$D = \{ (x,y) \mid a \le x \le b ,\ c \le y \le d \}$$

و

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{m-1} < x_m = b$$

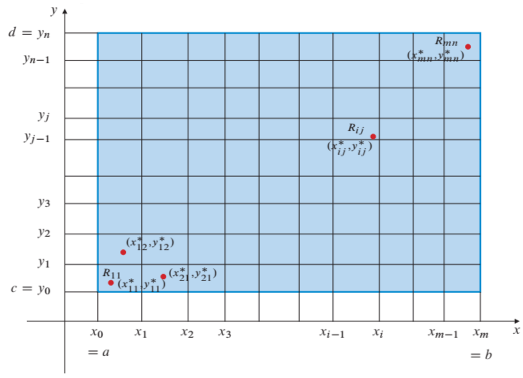
$$c = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_{n-1} < y_n = d$$

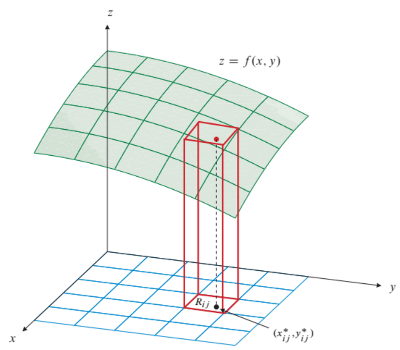
حال فرض کنید P مجموعه ای شامل همه مستطیل های R_{ij} باشد که

$$R_{ij} = \{ (x,y) \mid x_{i-1} \le x < x_i ,\ y_{j-1} < y < y_j \}$$

$$i = 1,2,\dots,m ,\quad j = 1,2,\dots,n$$

در این صورت P یک افراز از D است و نرم آن را به صورت ماکسیمم قطر R_{ij} ها تعریف می کنیم.





در این صورت اگر $f(x,y)$ یک تابع کراندار روی D باشد، مجموع ریمان تابع f روی افراز P از D به صورت زیر تعریف می گردد:

$$R(f,P) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x^*_{ij}, y^*_{ij}) \underbrace{\Delta x_i \Delta y_j}_{\Delta A_{ij}}$$

که در اینجا (x^*_{ij}, y^*_{ij}) نقطه دلخواهی از مستطیل R_{ij} است و

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} ,\quad \Delta y_j = y_j - y_{j-1}$$

تعریف: گوییم تابع کراندار $f(x,y)$ روی مستطیل D انتگرال‌پذیر است هرگاه:

$$\lim_{\|P\| \to 0} R(f,P) = I$$

در این صورت I را انتگرال دوگانه (مضاعف) f روی D نامیده و داریم:

$$\iint_D f(x,y)\, dA = I$$

در بالا dA را المان مساحت می‌نامیم. با توجه به اینکه $\Delta A = \Delta x \Delta y$ لذا می‌توانیم به جای dA از $dx\,dy$ یا $dy\,dx$ استفاده کنیم.

حال فرض کنید D یک ناحیه پیچیده‌تر ولی کراندار در $\mathbb{R}^2$ باشد، در این صورت می‌توان D را داخل یک مستطیل قرار داد و با گسترش صفر f به بیرون از ناحیه D انتگرال دوگانه را تعریف کرد.

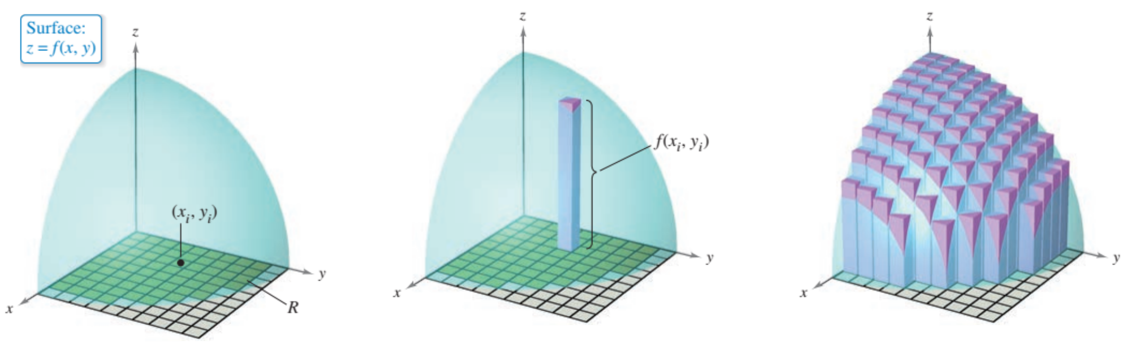
تعریف: اگر $f(x,y)$ یک تابع کراندار تعریف شده بر ناحیه D باشد، $\hat{f}$ را توسیع f تعریف می‌کنیم به طوری که بیرون ناحیه D صفر باشد:

$$\hat{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & (x,y) \in D \\ 0 & (x,y) \notin D \end{cases}$$

اگر D یک ناحیه کراندار باشد، در این صورت مستطیلی مانند R موجود است که $D \subseteq R$.

اگر $\hat{f}$ روی R انتگرال‌پذیر باشد، می‌گوییم f بر D انتگرال‌پذیر است و

$$\iint_D f(x,y)\, dA = \iint_R \hat{f}(x,y)\, dA$$



اگر f در دامنه بسته و کراندار D که مرز آن از تعدادی متناهی منحنی با طول های متناهی تشکیل شده است پیوسته باشد، در این صورت f روی D انتگرال پذیر است.

خواص انتگرال دوگانه:

اگر f و g توابعی انتگرال پذیر روی D و L و M اعداد ثابتی باشند آنگاه:

1) اگر مساحت D صفر باشد $\iint_D f(x,y)\,dA=0$.

2) مساحت دامنه: $\iint_D 1\,dA = (D \text{ مساحت})$

3) انتگرال های جانشین حجم ها: اگر روی D داشته باشیم $f(x,y)\geq 0$ در این صورت $\iint_D f(x,y)\,dA = V \geq 0$ که در آن V حجم جسمی است که به طور قائم روی D واقع شده و زیر رویه $z=f(x,y)$ قرار دارد.

اگر روی D داشته باشیم $f(x,y)\leq 0$ در این صورت $\iint_D f(x,y)\,dA = -V$ که در آن V حجم جسمی است که به طور قائم زیر D و بالای رویه $z=f(x,y)$ قرار دارد.

4) خاصیت خطی بودن عملگر انتگرال: انتگرال دوگانه خطی است یعنی

$$\iint_D (L f(x,y) + M g(x,y))\,dA = L\iint_D f(x,y)\,dA + M\iint_D g(x,y)\,dA$$

5) حفظ نامساوی ها: اگر روی D داشته باشیم $f(x,y)\leq g(x,y)$ در این صورت

$$\iint_D f(x,y)\,dA \leq \iint_D g(x,y)\,dA$$

6) نامساوی مثلث: $\left|\iint_D f(x,y)\,dA\right| \leq \iint_D |f(x,y)|\,dA$

7) خاصیت جمع پذیری دامنه ها: اگر D_1 ، D_2 ، ..... ، D_k ناحیه هایی غیر متقاطع باشند که روی هر یک f انتگرال پذیر باشد، آنگاه f روی $D = D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_k$ نیز انتگرال پذیر است و داریم:

$$\iint_D f(x,y)\, dA = \sum_{j=1}^{k} \iint_{D_j} f(x,y)\, dA$$

محاسبه انتگرال های دوگانه و انتگرال مکرر:

قضیه فوبینی (صورت اول): اگر ناحیه D یک مستطیل به فرم $[a,b] \times [c,d]$ باشد، در این صورت مقدار انتگرال دوگانه به صورت زیر به دست می آید:

$$\iint_D f(x,y)\, dA = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\, dy\right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\, dx\right] dy$$

توضیح:

1) انتگرال های سمت راست را انتگرال مکرر می گوییم.

2) در محاسبه انتگرال داخلی $\int_c^d f(x,y)\, dy$ نسبت به y انتگرال می گیریم و فرض می کنیم x پارامتری ثابت است (مشابه مشتق جزئی)

3) در عمل کروشه ها را نمی نویسیم:

$$\iint_D f\, dA = \int_a^b \int_c^d f\, dy\, dx$$

مثال: انتگرال دوگانه $\iint_R (2x^2-3y)\,dA$ را در صورتی حساب کنید که R ناحیه مرکب از جمیع نقاط (x,y) است که $-1 \leq x \leq 2$ و $1 \leq y \leq 3$ باشد.

$$\iint_R (2x^2-3y)\,dA = \int_1^3 \int_{-1}^2 (2x^2-3y)\,dx\,dy$$

$$= \int_1^3 \left[\frac{2}{3}x^3 - 3xy\right]_{x=-1}^2 dy$$

$$= \int_1^3 (6-9y)\,dy = 6y - \frac{9}{2}y^2\Big]_1^3 = -24$$

مثال: حجم جسم محدود به رویه $f(x,y) = 4 - \frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{16}y^2$، صفحات $x=3$ و $y=2$ و صفحات مختصات را بیابید.

$$V = \iint_D f(x,y)\,dA = \int_0^3 \int_0^2 \left(4 - \frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{16}y^2\right) dy\,dx$$

$$= \int_0^3 \left(4y - \frac{1}{9}x^2 y - \frac{1}{48}y^3\right)\Big|_{y=0}^2 dx$$

$$= \int_0^3 \left(\frac{47}{6} - \frac{2}{9}x^2\right) dx$$

$$= \frac{47}{6}x - \frac{2}{27}x^3\Big|_{x=0}^3 = 21.5$$

تعریف: دامنه D در صفحه xy را y ساده گوییم اگر توسط دو خط قائم $x=a$ و $x=b$ و دو نمودار پیوسته $y=c(x)$ و $y=d(x)$ بین این دو خط محدود شده باشد. به طور مشابه دامنه D را x ساده گوییم اگر توسط دو خط افقی $y=c$ و $y=d$ و دو نمودار پیوسته $x=a(y)$ و $x=b(y)$ بین دو خط محدود شده باشد.

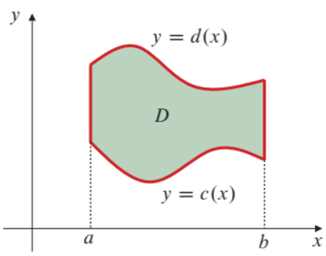


Figure 14.10 A y-simple domain

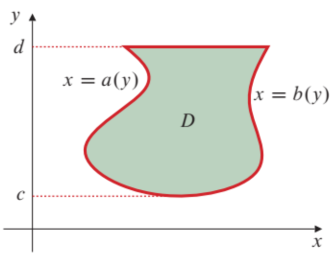


Figure 14.11 An x-simple domain

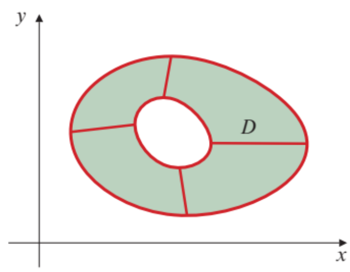


Figure 14.12 A regular domain

بسیاری از دامنه های انتگرال گیری که با آنها مواجه هستیم x ساده یا y ساده و یا هر دو هستند. به عنوان مثال مستطیل ها، مثلث ها، قرص ها هم x ساده و هم y ساده هستند. دامنه هایی که x ساده و یا y ساده نیستند را می توان در اکثر موارد به صورت اجتماعی متناهی از دامنه های غیر متقاطع x ساده و y ساده نوشت. این دامنه ها را منظم می گویند.

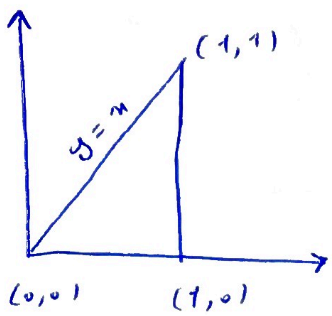
قضیه فوبینی (صورت دوم): اگر $f(x,y)$ در دامنه y ساده D که توسط $a \le x \le b$ ، $c(x) \le y \le d(x)$ مشخص می شود، پیوسته و کراندار باشد داریم:

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

به طور مشابه اگر D ، x ساده باشد که توسط $c \le y \le d$ و $a(y) \le x \le b(y)$ داده شده است، داریم:

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_c^d \int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

مثال: $\iint_T xy\,dA$ را روی مثلث T به رئوس $(0,0)$ ، $(1,0)$ و $(1,1)$ محاسبه کنید.



$$\iint_T xy\,dA = \int_0^1 \int_0^x xy\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{xy^2}{2}\right)\Big|_{y=0}^{x} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^3}{2}\,dx = \frac{x^4}{8}\Big|_0^1 = \frac{1}{8}$$

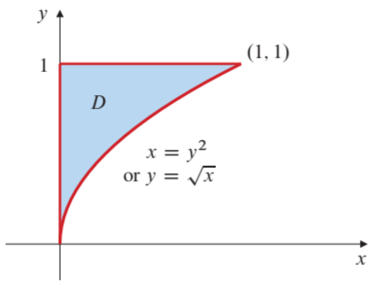
$$\iint_T xy\,dA = \int_0^1 \int_y^1 xy\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\frac{yx^2}{2}\right)\Big|_{x=y}^{1} dy$$

$$= \int_0^1 \frac{y}{2}(1-y^2)\,dy = \left(\frac{y^2}{4} - \frac{y^4}{8}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{8}$$

مثال 4: انتگرال مکرر زیر را محاسبه کنید:

$$\int_0^1\int_{\sqrt{x}}^1 e^{y^3}\,dy\,dx$$

حل: جهت محاسبه انتگرال داخلی باید ابتدا پادمشتق e^{y^3} را به دست آوریم که قابل محاسبه نیست. پس نیاز داریم که ترتیب انتگرال گیری را عوض کنیم. ابتدا ناحیه‌ای که روی آن انتگرال دوگانه گرفته شده است رسم می‌کنیم:



$$I=\iint_D e^{y^3}\,dA=\int_0^1\int_0^{y^2} e^{y^3}\,dx\,dy$$

$$=\int_0^1 e^{y^3}x\Big|_{x=0}^{y^2}dy=\int_0^1 y^2e^{y^3}dy$$

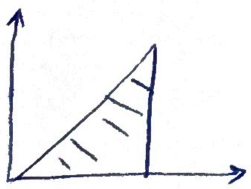
$$=\int_0^1 \tfrac{1}{3}(3y^2)e^{y^3}dy$$

$$=\tfrac{1}{3}e^{y^3}\Big|_{y=0}^{1}=\frac{e-1}{3}$$

مثال 5: انتگرال مکرر زیر را محاسبه کنید:

$$I=\int_0^1\int_y^1 \frac{\sin(x)}{x}\,dx\,dy$$

حل: محاسبه این انتگرال مشابه مثال قبل به این شکل ممکن نیست پس ترتیب انتگرال گیری را عوض می‌کنیم:

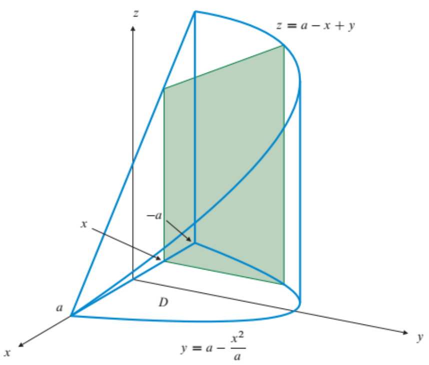


$$I=\iint_D \frac{\sin(x)}{x}\,dA=\int_0^1\int_0^x \frac{\sin(x)}{x}\,dy\,dx$$

$$=\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x}y\Big|_{y=0}^{x}dx=\int_0^1 \sin(x)\,dx$$

$$=-\cos(x)\Big|_0^1=-\cos(1)-1$$

مثال 6: حجم جسمی را به دست آورید که محدود به صفحات $y=0$ ، $z=0$ و $z=a-x+y$
و استوانه سهموی $y=a-\frac{x^2}{a}$ باشد.



$$V=\int_{-a}^{a}\int_{0}^{a-\frac{x^2}{a}}(a-x+y)\,dy\,dx$$

$$=\int_{-a}^{a}\int_{0}^{a-\frac{x^2}{a}}(a-y)\,dy\,dx$$

در بالا جمله x از انتگرال به علت فرد بودن تابع x و متقارن بودن ناحیه حول محور y ها حذف شد.

$$\Rightarrow V=\int_{-a}^{a}\left(ay-\frac{y^2}{2}\right)\Big|_{y=0}^{a-\frac{x^2}{a}}dx$$

$$=\int_{-a}^{a}\left[a^2-x^2+\frac{1}{2}\left(a^2-2x^2+\frac{x^4}{a^2}\right)\right]dx$$

$$=2\int_{0}^{a}\left(\frac{3}{2}a^2-2x^2+\frac{x^4}{2a^2}\right)dx$$

$$=\left(3a^2x-\frac{4}{3}x^3+\frac{x^5}{5a^2}\right)\Big|_{0}^{a}$$

$$=3a^3-\frac{4}{3}a^3+\frac{1}{5}a^3=\frac{28}{15}a^3$$

مثال 7: حجم جسم محدود به سهمی گون $z=4-x^2-2y^2$ و صفحه xy را بیابید.

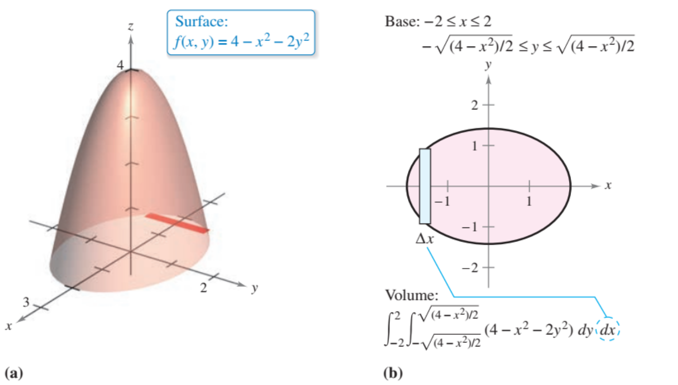


Figure 14.17

$$V = \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{(4-x^2)/2}}^{\sqrt{(4-x^2)/2}} (4 - x^2 + 2y^2)\, dy\, dx$$

$$= \int_{-2}^{2} \left((4 - x^2) y + \frac{2y^3}{3} \right) \Bigg|_{y = -\sqrt{(4-x^2)/2}}^{\sqrt{(4-x^2)/2}} dx$$

$$= \int_{-2}^{2} \left(\left(\frac{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}} + \frac{2}{3(2\sqrt{2})} (4-x^2)^{3/2} \right) - \left(- \frac{(4-x^2)^{3/2}}{\sqrt{2}} - \frac{2}{3(\sqrt{2})} (4-x^2)^{3/2} \right. \right.$$

$$= \frac{4}{3\sqrt{2}} \int_{-2}^{2} (4 - x^2)^{\frac{3}{2}}\, dx \qquad \begin{bmatrix} x = 2\sin(\theta) \\ dx = 2\cos(\theta) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{4}{3\sqrt{2}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 8\cos^3(\theta)\, (2\cos(\theta))\, d\theta$$

$$= \frac{64}{3\sqrt{2}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4(\theta)\, d\theta = 4\sqrt{2}\,\pi$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4(\theta)\, d\theta = 2\int_{0}^{\pi/2} \left(\frac{1 + \cos(2\theta)}{2} \right)^2 d\theta$$

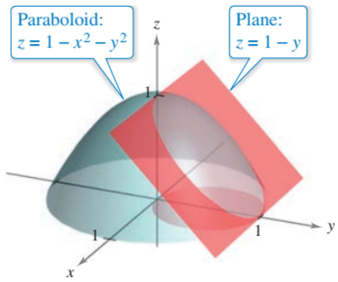
$$= 2\int_{0}^{\pi/2} \frac{1}{4} \left(1 + 2\cos(2\theta) + \cos^2(2\theta) \right) d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_{0}^{\pi/2} \left(1 + 2\cos(2\theta) + \frac{1}{2}(1 + \cos(4\theta)) \right) d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \left(\theta + \sin(2\theta) + \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{8}\sin(4\theta) \right) \Bigg|_{\theta = 0}^{\pi/2}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} + 0 + \frac{\pi}{4} + 0 \right) = \frac{3\pi}{8}$$

مثال 8: حجم ناحیه محدود به رویه $z=1-x^2-y^2$ و صفحه $z=1-y$ را بیابید.

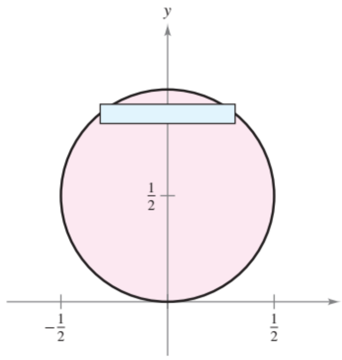


$$1-y = 1-x^2-y^2 \Rightarrow x^2 = y - y^2$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - y = 0$$

$$x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

لذا ناحیه‌ای که بر پایه روی آن انتگرال دوگانه گرفته شود یک دایره می باشد.



R: $0 \le y \le 1$
$-\sqrt{y-y^2} \le x \le \sqrt{y-y^2}$

$$V = \int_0^1 \int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} (1-x^2-y^2)\,dx\,dy$$

$$- \int_0^1 \int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} (1-y)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^1 \int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} (y-y^2-x^2)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^1 (y-y^2)x - \frac{x^3}{3} \Big|_{x=-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} dy$$

$$= \frac{4}{3}\int_0^1 (y-y^2)^{3/2}\,dy$$

$$= \left(\frac{4}{3}\right)\int_0^1 \left(\frac{1}{4} - \left(y-\frac{1}{2}\right)^2\right)^{3/2} dy$$

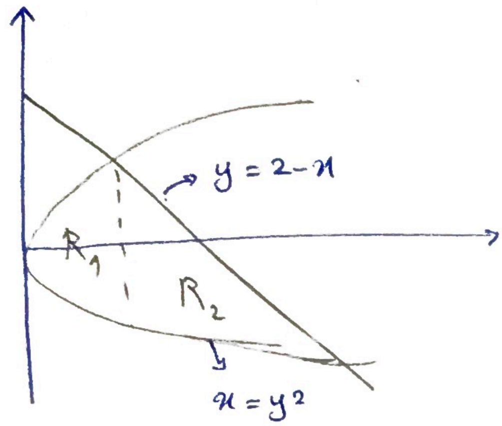
$$\left(y - \frac{1}{2}\right) = \frac{\sin(\theta)}{2}$$

$$= \frac{4}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{1}{4}\cos^2(\theta)\right)^{3/2} \left(\frac{1}{2}\cos(\theta)\right) d\theta$$

$$= \frac{4}{3} \times \left(\frac{1}{8}\right) \times \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4(\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{1}{12} \times \int_0^{\pi/2} \cos^4(\theta)\,d\theta = \frac{1}{12} \times \frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{32}$$

مثال ۹: مطلوبست مساحت بین $x=y^2$ و $x+y=2$.



$$\iint_D dA=\iint_{R_1} dA+\iint_{R_2} dA$$

$$=\int_0^1\left(\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} dy\right)dx+\int_1^4\left(\int_{-\sqrt{x}}^{2-x} dy\right)dx$$

$$=\int_0^1 y\Big|_{y=-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}dx+\int_1^4 y\Big|_{-\sqrt{x}}^{2-x}dx$$

$$x=(2-x)^2\Rightarrow x^2-4x+4=x$$

$$x^2-5x+4=0\Rightarrow(x-4)(x-1)=0$$

$$\begin{cases}x=1\\x=4\end{cases}$$

$$=\int_0^1 2\sqrt{x}\,dx+\int_1^4(2-x+\sqrt{x})\,dx$$

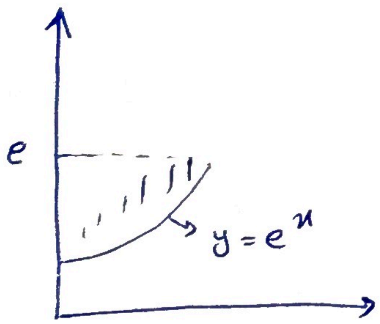
$$=2\frac{x^{3/2}}{3/2}\Big|_0^1+\left(2x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^{3/2}}{3/2}\right)\Big|_1^4$$

$$=\frac{4}{3}+\left(8-8+\frac{8}{\frac{3}{2}}\right)-\left(2-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right)$$

$$=\frac{4}{3}+\frac{16}{3}-\left(\frac{9}{6}+\frac{4}{6}\right)=\frac{20}{3}-\frac{13}{6}=\frac{27}{6}$$

مثال ۱۰: انتگرال مکرر زیر را محاسبه کنید:

$$I=\int_0^1\int_{e^x}^{e}\frac{1}{\ln(y)}\,dy\,dx$$



$$I=\int_1^e\int_0^{\ln(y)}\frac{1}{\ln(y)}\,dx\,dy$$

$$=\int_1^e\frac{x}{\ln(y)}\Big|_{x=0}^{\ln(y)}dy=\int_1^e 1\,dy=e-1$$

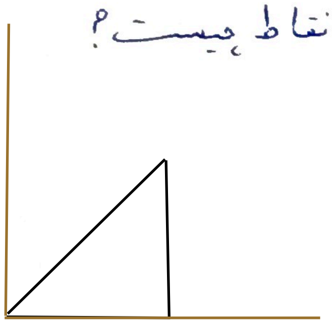
قضیه مقدار میانگین برای انتگرال های دوگانه: اگر $f(x,y)$ روی یک ناحیه بسته و کراندار و ساده D در صفحه xy پیوسته باشد. آنگاه نقطه‌ای چون $(x_0,y_0)\in D$ موجود است که

$$\iint_D f(x,y)\,dA=f(x_0,y_0)\times \text{مساحت } D$$

تعریف: مقدار متوسط تابع انتگرال پذیر $f(x,y)$ روی ناحیه D برابر است با:

$$\bar{f} = \frac{1}{\text{مساحت } D} \iint_D f(x,y)\, dA$$

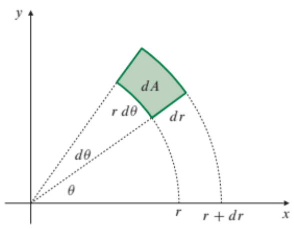
مثال ۱۱: تعداد زیادی نقطه (x,y) به صورت دلخواه از داخل مثلث با رئوس $(0,0)$، $(1,0)$، $(1,1)$ انتخاب می کنیم. مقدار متوسط x^2+y^2 برای این نقاط چیست؟

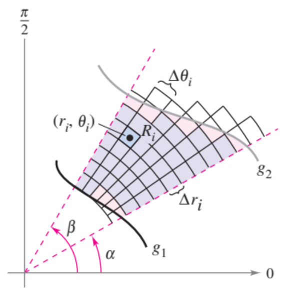


$$\bar{f} = \frac{1}{\frac{1}{2}} \iint_T (x^2+y^2)\, dA = 2\int_0^1\int_0^x (x^2+y^2)\, dy\, dx$$

$$= 2\int_0^1 \left(x^2 y + \frac{1}{3}y^3\right)\Big|_{y=0}^{x} dx = \frac{8}{3}\int_0^1 x^3\, dx = \frac{2}{3}$$

انتگرال دوگانه در مختصات قطبی:





$$\iint_D f(x,y)\, dA = \iint_D f(r,\theta)\, dA = \int_\alpha^\beta \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r,\theta)\, r\, dr\, d\theta$$

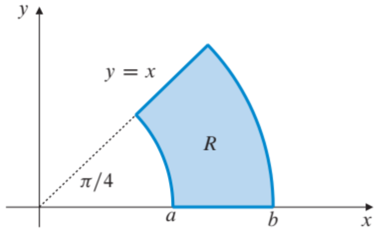
تعیین حدود انتگرال در مختصات قطبی:

1) تصویری از ناحیه تحت انتگرال رسم کنید.

2) شعاع L را از مبدا به سوی ناحیه D رسم کرده، مقدار r ورودی و r خروجی را پیدا کنید. این مقادیر حدود انتگرال r را تعیین می کنند.

3) برای تعیین حدود θ، کافیست کمترین و بیشترین مقدار θ را که به ازای آنها شعاع های رسم شده از مبدا ناحیه را می پوشانند، پیدا کنیم.

مثال ۱۲: اگر R بخشی از حلقه $0<a^2\le x^2+y^2\le b^2$ در ربع اول و زیر خط $y=x$ باشد،



$$I=\iint_R \frac{y^2}{x^2}\,dA$$

$$x=r\cos(\theta),\quad y=r\sin(\theta)$$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{x^2}=tg^2(\theta)$$

$$\Rightarrow I=\int_0^{\pi/4}\int_a^b tg^2(\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{\pi/4} tg^2(\theta)\frac{r^2}{2}\Big|_{r=a}^{b}\,d\theta$$

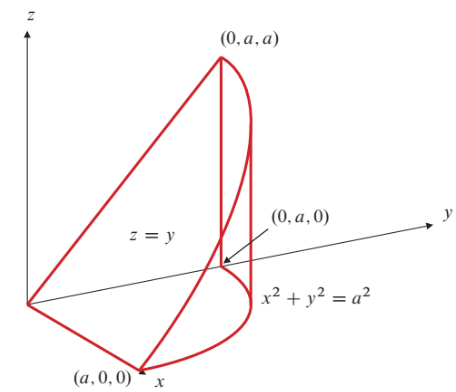
$$=\frac{1}{2}(b^2-a^2)\int_0^{\pi/4} tg^2(\theta)\,d\theta$$

$$=\frac{1}{2}(b^2-a^2)\int_0^{\pi/4}(\sec^2(\theta)-1)\,d\theta$$

$$=\frac{1}{2}(b^2-a^2)\,(tg(\theta)-\theta)\Big|_0^{\pi/4}$$

$$=\frac{1}{2}(b^2-a^2)(1-\pi/4)=\frac{4-\pi}{8}(b^2-a^2)$$

مثال ۱۳: حجم جسمی در یک هشتم اول داخل استوانه $x^2+y^2=a^2$ و زیر صفحه $z=y$ را بیابید.



$$V=\int_0^{\pi/2}\int_0^a r\sin(\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{\pi/2}\sin(\theta)\frac{r^3}{3}\Big|_{r=0}^{a}\,d\theta$$

$$=\frac{a^3}{3}\int_0^{\pi/2}\sin(\theta)\,d\theta=\frac{a^3}{3}(-\cos(\theta))\Big|_0^{\pi/2}$$

$$=\frac{a^3}{3}$$

مثال ۱۴: حجم بالای صفحه xy و زیر سهمی وار $z=1-x^2-y^2$ را بیابید.

$$[z=0\Rightarrow x^2+y^2=1]\quad V=\iint_D(1-x^2-y^2)\,dA=\int_0^{2\pi}\int_0^1(1-r^2)\,r\,dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\Big|_{r=0}^{1}\,d\theta=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}d\theta=\frac{\pi}{2}$$

(یک انتگرال مهم) 15 : نشان دهید

$$I=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$$

$$I^2=\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\right)^2=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}dy$$

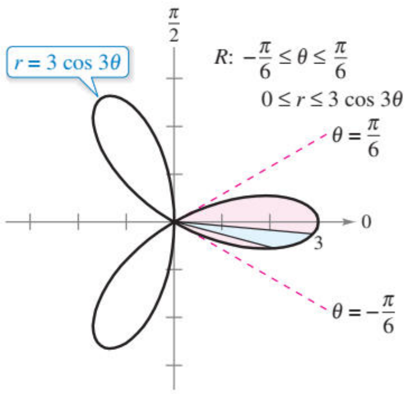
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy$$

$$=\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-r^2}r\,dr\,d\theta$$

$$=\int_{0}^{2\pi} -\tfrac{1}{2}e^{-r^2}\Big|_{r=0}^{\infty}d\theta$$

$$=\frac{1}{2}(2\pi)=\pi \Rightarrow I=\sqrt{\pi}$$

مثال 16: مساحت ناحیه محدود به منحنی $r=3\cos(3\theta)$ را بیابید :



$$A=3\int_{-\pi/6}^{\pi/6}\int_{0}^{3\cos(3\theta)} r\,dr\,d\theta$$

$$=3\int_{-\pi/6}^{\pi/6}\frac{r^2}{2}\Big|_{r=0}^{3\cos(3\theta)}d\theta$$

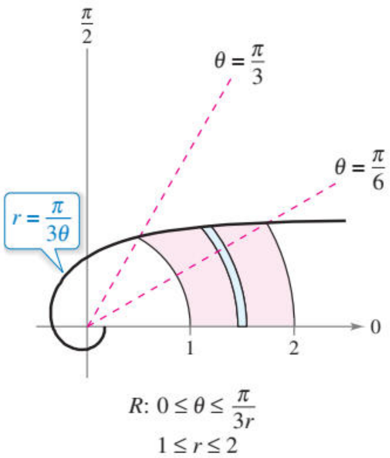
$$=\frac{27}{2}\int_{-\pi/6}^{\pi/6}\cos^2(3\theta)\,d\theta$$

$$=\frac{27}{2}\int_{-\pi/6}^{\pi/6}\tfrac{1}{2}\left(1+\cos(6\theta)\right)d\theta$$

$$=\frac{27}{4}\left(\theta+\tfrac{1}{6}\sin(6\theta)\right)\Big|_{-\pi/6}^{\pi/6}$$

$$=\frac{9\pi}{4}$$

مثال 17: مساحت ناحیه محدود به پیچ $r = \frac{\pi}{3\theta}$ و محور قطبی و خطوط $r=1$ و $r=2$ را بیابید.



$$A = \int_1^2 \int_0^{\frac{\pi}{3r}} r \, d\theta \, dr = \int_1^2 r\theta \Big|_{\theta=0}^{\frac{\pi}{3r}} dr$$

$$= \int_1^2 \frac{\pi}{3} dr = \frac{\pi}{3}$$

فرمول تغییر متغیر در انتگرال های دوگانه:

فرض کنید $x = x(u,v)$ و $y = y(u,v)$ یک تبدیل یک به یک از دامنه S در صفحه uv به دامنه D در صفحه xy باشد. فرض کنید توابع x و y و مشتقات جزئی مرتبه اول آنها نسبت به u و v در S پیوسته باشند. اگر $f(x,y)$ روی D انتگرال پذیر باشد، و اگر داشته باشیم $g(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$، آنگاه g روی S انتگرال پذیر است و داریم:

$$\iint_D f(x,y)\, dx\, dy = \iint_S g(u,v) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du\, dv$$

به عنوان مثال اگر $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$ داریم:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{vmatrix} = r\cos^2(\theta) + r\sin^2(\theta) = r$$

$$\Rightarrow \iint_D f(x,y)\, dx\, dy = \iint_S f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\, r\, dr\, d\theta$$