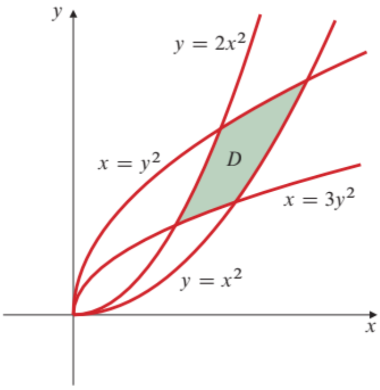
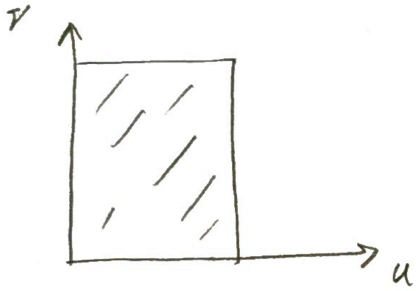
مثال ۱۸: مساحت ناحیه محدود به چهار سهمی $y=x^2$ ، $y=2x^2$ ، $x=y^2$ و $x=3y^2$ را بیابید.



$$u=\frac{y}{x^2},\quad v=\frac{x}{y^2}$$

$$1<u<2,\quad 1<v<3$$

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}$$



$$=\begin{vmatrix} -\frac{2y}{x^3} & \frac{1}{x^2} \\ \frac{1}{y^2} & -\frac{2x}{y^3} \end{vmatrix}$$

$$=\frac{4xy}{x^3y^3}-\frac{1}{x^2y^2}=\frac{3}{x^2y^2}=\frac{3x^2y^2}{x^4y^4}$$

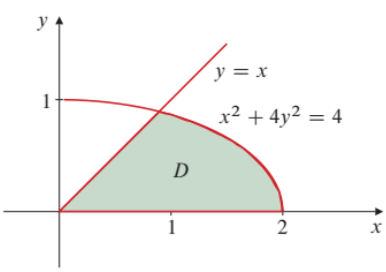
$$=3\,\frac{x^2}{y^4}\times\frac{y^2}{x^4}=3v^2u^2$$

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=\left|\frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}\right|=\frac{1}{3u^2v^2}$$

$$\iint_D dx\,dy=\int_1^2\int_1^3\frac{1}{3u^2v^2}\,dv\,du=1/3\int_1^2\frac{1}{u^2}\left(-\frac{1}{v}\right)\Big|_{v=1}^{3}du$$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{u}\right)\Big|_1^2=1/3\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=1/9$$

مثال ۱۹: مطلوبست محاسبه $I=\iint_D \frac{y}{x}\,dx\,dy$ که در آن D ناحیه محصور بین خطوط $y=x$ ، $y=0$ ، $x^2+4y^2=4$ است.

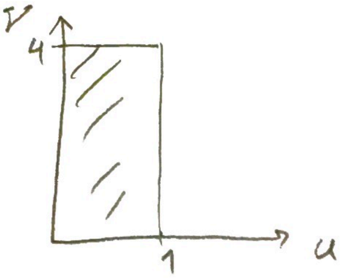


$$u=\frac{y}{x},\quad v=x^2+4y^2$$

$$0<u<1,\quad 0<v<4$$

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix} -y/x^2 & 1/x \\ 2x & 8y \end{vmatrix}=-\frac{8y^2}{x^2}-2$$

$$=-8u^2-2$$



$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \frac{1}{\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|} = \frac{1}{8u^2+2}$$

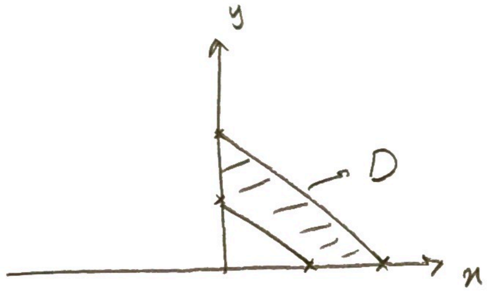
$$\iint_D \frac{y}{x}\, dA = \int_0^4 \int_0^1 \frac{u}{8u^2+2}\, du\, dv$$

$$= \frac{1}{16}\int_0^4 \ln|8u^2+2|\Big|_{u=0}^{1}\, dv$$

$$= \frac{1}{16}\int_0^4 (\ln(10)-\ln(2))\, dv$$

$$= \frac{1}{4}\ln(5)$$

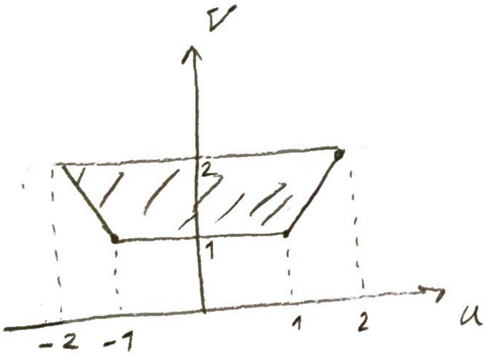
مثال 20: مطلوبست محاسبه $\iint_D \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right) dA$ که در آن D ذوزنقه‌ای با رئوس $(1,0)$، $(2,0)$، $(0,1)$، $(0,2)$ واقع در صفحه xy است.



$u = x-y, \quad v = x+y$

$(1,0) \to (1,1) \quad , \quad (2,0) \to (2,2)$

$(0,1) \to (-1,1) \quad , \quad (0,2) \to (-2,2)$



$$J = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \left|\begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{vmatrix}\right| = 1/2$$

$$\begin{bmatrix} x = 1/2\,(u+v) \\ y = 1/2\,(v-u) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \iint_D \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right) dA = \int_1^2 \int_{-v}^{v} \cos\left(\frac{u}{v}\right) 1/2\, du\, dv$$

$$= 1/2 \int_1^2 v \sin\left(\frac{u}{v}\right)\Big|_{u=-v}^{v}\, dv$$

$$= 1/2 \int_1^2 v(\sin(1)-\sin(-1))\, dv$$

$$= \sin(1)\, \frac{v^2}{2}\Big|_1^2 = 3/2\, \sin(1)$$

انتگرال سه‌گانه:

فرض کنید B یک مکعب مستطیل مانند

$$B = \{ (x, y, z) \mid a_0 \leq x \leq a_1 ,\ b_0 \leq y \leq b_1 ,\ c_0 \leq z \leq c_1 \}$$

باشد و

$$a_0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{m_1} = a_1$$

$$b_0 = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_{m_2} = b_1$$

$$c_0 = z_0 < z_1 < z_2 < \dots < z_{m_3} = c_1$$

حال فرض کنید P مجموعه‌ای شامل همه مکعب مستطیل های B_{ijk} باشد که:

$$B_{ijk} = \{ (x, y, z) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i ,\ y_{j-1} \leq y \leq y_j ,\ z_{k-1} \leq z \leq z_k \}$$

دراینصورت P یک افراز از B است و نرم آنرا بصورت ماکسیمم حجم B_{ijk} ها تعریف کنیم.

دراینصورت اگر $f(x,y,z)$ یک تابع کراندار روی B باشد، مجموع ریمان تابع f روی افراز P از B به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$R(f, P) = \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_2} \sum_{k=1}^{m_3} f(x^*_{ijk}, y^*_{ijk}, z^*_{ijk}) \, \Delta x_i \, \Delta y_j \, \Delta z_k$$

که در آن $(x^*_{ijk}, y^*_{ijk}, z^*_{ijk})$ نقطه دلخواهی از B_{ijk} است.

تعریف: گوییم تابع کراندار $f(x,y,z)$ روی مکعب مستطیل B انتگرال پذیر است هرگاه

$$\lim_{\substack{\|P\| \to 0 \\ m_1 \to \infty \\ m_2 \to \infty \\ m_3 \to \infty}} R(f, P) = I$$

دراینصورت I را انتگرال سه‌گانه f روی B می نامیم و تعریف می کنیم:

$$\iiint_B f(x,y,z) \, dV$$

حال فرض کنید D یک ناحیه پیچیده تر ولی کراندار در $\mathbb{R}^3$ باشد. در اینصورت می توان D را داخل یک مکعب مستطیل نشاند و مشابه بحث مطرح شده در انتگرال دوگانه با گسترش صفر تابع f به بیرون از ناحیه D، انتگرال سه‌گانه را تعریف نمود.

تعریف: حجم یک جسم محدود به ناحیه بسته و کراندار D برابر است با

$$V = \iiint_D dV$$

و اگر چگالی این جسم تابع پیوسته $f(x,y,z)$ باشد، جرم جسم برابر است با:

$$m = \iiint_D f(x,y,z)\, dV$$

محاسبه انتگرال سه‌گانه به کمک انتگرال مکرر:

قضیه فوبینی (صورت اول): فرض کنید

$$B = \{(x,y,z) \mid x_1 < x < x_2,\ y_1 < y < y_2,\ z_1 < z < z_2\}$$

در اینصورت انتگرال سه‌گانه تابع پیوسته f روی B به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\iiint_B f(x,y,z)\,dV = \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

$$= \int_{z_1}^{z_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

$$= \cdots$$

تعریف: ناحیه D در فضای $\mathbb{R}^3$ را z ساده گوییم هرگاه، هر خط موازی با محور z ها رسم کنیم، مرز ناحیه D را حداکثر در دو نقطه قطع کند.

تعریف فوق به این معناست که ناحیه D از پایین به رویه $z=g_1(x,y)$ و از بالا به رویه $z=g_2(x,y)$ محدود شده باشد.

تذکر: مشابه بالا می توان ناحیه x ساده و y ساده را تعریف کرد.

حال فرض کنید R تصویر ناحیه Z ساده D روی صفحه xy باشد، در این صورت

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dV = \iint_R \int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,dA$$

حال کافیست ناحیه R را مشابه بحث انتگرال دوگانه تعیین حدود کنیم. مثلاً اگر R، y ساده باشد، یعنی بتوان R را به صورت

$$a < x < b,\quad h_1(x) \leq y \leq h_2(x)$$

نمایش داد، داریم:

$$\iiint_D f\,dV = \int_a^b \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

نتیجه بحث فوق قضیه فوبینی صورت دوم است.

قضیه: اگر D ناحیه‌ای باشد که به صورت زیر تعریف گردد:

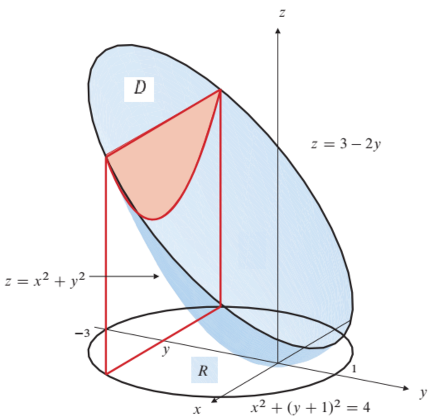
$$a \leq x \leq b,\; h_1(x) \leq y \leq h_2(x),\quad g_1(x,y) \leq z \leq g_2(x,y)$$

که در آن h_1، h_2، g_1، g_2 توابعی پیوسته هستند، در اینصورت:

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dV = \int_a^b \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

توجه کنید که باید ابتدا بررسی کرد ناحیه D نسبت به کدام محور مختصات ساده است. سپس تصویر آنرا نسبت به صفحه قائم بر آن به دست آورد که این ناحیه را R می نامیم. در نهایت ناحیه R را مشابه بحث مطرح شده در انتگرال های دوگانه تعیین حدود می کنیم.

مثال 21: حجم ناحیه D زیر صفحه $z=3-2y$ ، و بالای سهمی‌گون $z=x^2+y^2$ را تعیین کنید.



حل: با قطع دادن این دو رویه داریم:

$$x^2+y^2=3-2y$$

$$\Rightarrow x^2+(y+1)^2=4$$

که معادله یک استوانه مستدیر را نشان می‌دهد، لذا تصویر ناحیه D روی صفحه xy یک دایره به شعاع 2 و به مرکز $(0,-1)$ است.

$$V=\iint_R \int_{x^2+y^2}^{3-2y} dz\, dA$$

$$=\int_{-2}^{1}\int_{-\sqrt{4-(y+1)^2}}^{\sqrt{4-(y+1)^2}}\int_{x^2+y^2}^{3-2y} dz\,dx\,dy$$

به طور معادل داریم:

$$\iint_R (3-2y-x^2-y^2)\, dA$$

$$=\iint_R [4-x^2-(y+1)^2]\, dA$$

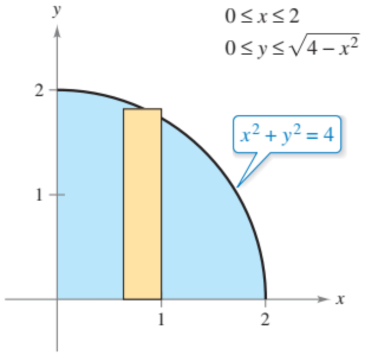
اگر از تغییر متغیر $x=r\cos(\theta)$ ، $y=-1+r\sin(\theta)$ استفاده کنیم، داریم:

$$\iint_R (4-x^2-(y+1)^2)\, dA=\int_0^{2\pi}\int_0^{2}(4-r^2)\, r\, dr\, d\theta$$

$$=8\pi$$

مثال 22: به کمک انتگرال سه‌گانه حجم بیضی‌گون $4x^2+4y^2+z^2=16$ را بیابید.

برای سادگی محاسبات حجم بیضی‌گون را روی یک هشتم اول محاسبه کرده، و سپس در 8 ضرب می‌کنیم.



$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{\sqrt{16-4x^2-4y^2}} dz\,dy\,dx$$

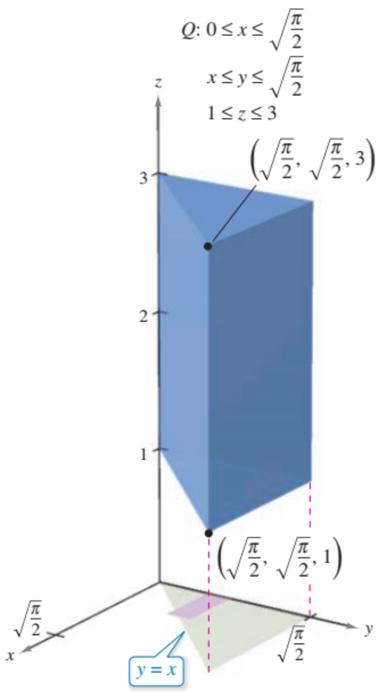
$$= \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} 2\sqrt{4-x^2-y^2}\,dy\,dx$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} \int_0^2 \sqrt{4-r^2}\; r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} -\frac{2}{3}(4-r^2)^{3/2}\Big|_0^2$$

$$= \frac{16}{3}\,\theta\Big|_0^{\pi/2} = \frac{8\pi}{3}$$

$$V = 8 \times \frac{8\pi}{3} = \frac{64}{3}\pi$$



مثال 23: به کمک تغییر ترتیب انتگرال گیری، انتگرال سه‌گانه

$$I = \int_0^{\sqrt{\pi/2}} \int_x^{\sqrt{\pi/2}} \int_1^3 \sin(y^2)\,dz\,dy\,dx$$

را محاسبه کنید.

$$0 < x \le \sqrt{\pi/2}, \quad x \le y \le \sqrt{\pi/2}, \quad 1 < z < 3$$

$$I = \int_0^{\sqrt{\pi/2}} \int_0^{y} \int_1^3 \sin(y^2)\,dz\,dx\,dy$$

$$= \int_0^{\sqrt{\pi/2}} \int_0^{y} 2\sin(y^2)\,dx\,dy$$

$$= 2\int_0^{\sqrt{\pi/2}} y\sin(y^2)\,dy$$

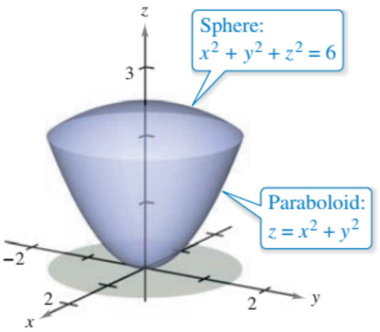
$$= -\cos(y^2)\Big|_0^{\sqrt{\pi/2}} = -\cos(\pi/2) - (-\cos(0)) = 0-(-1) = 1$$

مثال 24: جسمی را در نظر بگیرید که از پایین به سهمی‌گون $z=x^2+y^2$ و از بالا به کره $x^2+y^2+z^2=6$ محدود شده است. اگر چگالی این جسم به صورت $1+x^2+y^2$ باشد، جرم آنرا محاسبه کنید.

$$x^2+y^2+z^2=6, \quad z = x^2+y^2$$

$$z^2+z=6 \Rightarrow z^2+z-6=0 \Rightarrow (z+3)(z-2)=0$$

$$z=2 \checkmark \quad z=-3 \times$$



Q: $x^2 + y^2 \le z \le \sqrt{6 - x^2 - y^2}$
$-\sqrt{2 - x^2} \le y \le \sqrt{2 - x^2}$
$-\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2}$

$R: x^2 + y^2 = 2$

$$\iint_R \int_{x^2+y^2}^{\sqrt{6-x^2-y^2}} (1 + x^2 + y^2)\, dz\, dA$$

$$= \iint_R \left[\sqrt{6-x^2-y^2} - (x^2+y^2)\right](1 + x^2 + y^2)\, dA$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} (\sqrt{6-r^2} - r^2)(1 + r^2)\, r\, dr\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2} (\sqrt{6-u} - u)(1 + v)\, du\, d\theta \qquad \left[\begin{array}{l} u = r^2 \\ du = 2r\,dr \\ \frac{1}{2}du = r\,dr \end{array}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2} (\sqrt{6-u} + u\sqrt{6-u} - u - u^2)\, du\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[-\frac{2}{3}(6-u)^{3/2} - \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} - \frac{2}{3}u(6-u)^{3/2} + \frac{4}{15}(6-u)^{5/2}\right]_{u=0}^{2} d\theta$$

$= \dots$

تغییر متغیر در انتگرال‌های سه‌گانه: مشابه بحثی که در انتگرال‌های دوگانه مطرح شد، تغییر متغیر برای انتگرال‌های سه‌گانه (وحتی بالاتر) قابل گسترش است. فرض کنید:

$$x = x(u,v,w), \quad y = y(u,v,w), \quad z = z(u,v,w)$$

تبدیل‌های یک به یک از دامنه S در فضای uvw به دامنه D در فضای xyz باشند، همچنین x، y، و z مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته نسبت به u، v، و w داشته باشند، در اینصورت:

$$\iiint_D f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_S g(u,v,w)\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| du\, dv\, dw$$

که در آن $g(u,v,w)=f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))$.

توجه کنید که المان حجم به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$dV=dxdydz=\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|dudvdw$$

مثال [25]: حجم بیضی‌گون $4x^2+4y^2+z^2=16$ را به کمک تغییرمتغیرهای $x=2u$ ، $y=2u$ ، و $z=4w$ به دست آورید.

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{16}=1\Rightarrow u^2+v^2+w^2=1$$

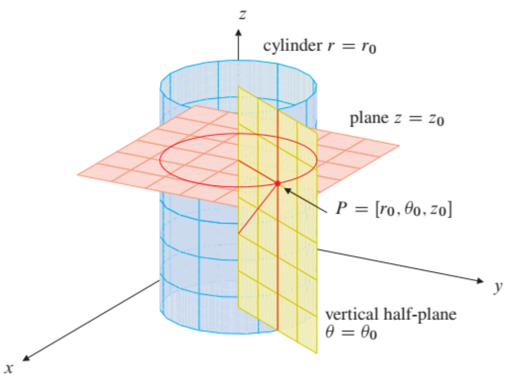
$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\begin{vmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&4\end{vmatrix}=16$$

$$\Rightarrow\iiint_{4x^2+4y^2+z^2\le 16}dxdydz=\iiint_{u^2+v^2+w^2\le 1}16\,dudvdz=16\times\frac{4}{3}\pi=\frac{64}{3}\pi$$

انتگرال سه‌گانه در مختصات استوانه‌ای:

با توجه به اینکه $x=r\cos(\theta)$, $y=r\sin(\theta)$, $z=z$ لذا در مختصات استوانه‌ای داریم:

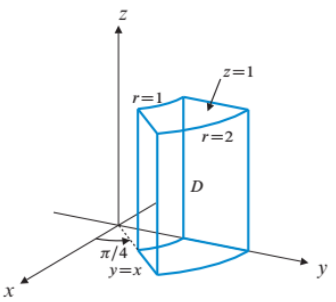
$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}=\begin{vmatrix}\cos(\theta)&-r\sin(\theta)&0\\\sin(\theta)&r\cos(\theta)&0\\0&0&1\end{vmatrix}=r$$



لذا عنصر dV در مختصات استوانه‌ای به صورت زیر است:

$$dV=r\,dr\,d\theta\,dz$$

مثال 26: انتگرال $\iiint\limits_D (x^2+y^2)\,dV$ که در آن D ناحیه‌ای واقع بر یک هشتم اول فضا و محدود به استوانه‌های $x^2+y^2=1$ ، $x^2+y^2=4$ و صفحات $z=0$ ، $z=1$ ، $x=0$ و $x=y$ است را به دست آورید.



$$x^2+y^2=1 \Rightarrow r=1$$

$$x^2+y^2=4 \Rightarrow r=2$$

$$z=0,\ z=1\ ,\ x=0 \Rightarrow \theta=\pi/2$$

$$x=y \Rightarrow \theta=\pi/4$$

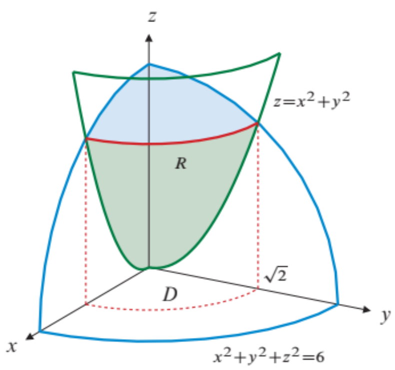
$$\int_0^{\pi/4}\int_1^2\int_0^1 r^2\, r\,dz\,dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{\pi/4}\int_1^2 r^3 z\Big|_{z=0}^{1}\,dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{\pi/4}\int_1^2 r^3\,dr\,d\theta=\int_0^{\pi/4}\frac{r^4}{4}\Big|_{r=1}^{2}\,d\theta$$

$$=\frac{15}{4}\times\frac{\pi}{4}=\frac{15}{16}\pi$$

مثال 27: به کمک انتگرال سه‌گانه حجم جسمی که درون کره $x^2+y^2+z^2=6$ و بالای $z=x^2+y^2$ قرار دارد را بیابید.



با قطع دادن این دو رویه داریم:
$$6-x^2-y^2=z^2=(x^2+y^2)^2$$

$$6-r^2=r^4 \Rightarrow r^4+r^2-6=0$$

$$(r^2+3)(r^2-2)=0$$

که جواب آن $r=\sqrt{2}$ است (استوانه)

$$\Rightarrow V=\iiint\limits_R dV=\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}}\int_{r^2}^{\sqrt{6-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} rz \Big|_{z=r^2}^{\sqrt{6-r^2}} \, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} \left(r\sqrt{6-r^2} - r^3\right) dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-\tfrac{1}{3}(6-r^2)^{3/2} - \frac{r^4}{4}\right)\Big|_{r=0}^{\sqrt{2}} d\theta$$

$$= \left(\frac{6\sqrt{6}}{3} - \frac{8}{3} - 1\right) \times 2\pi$$

$$= \frac{2\pi}{3}\left(6\sqrt{6} - 11\right)$$

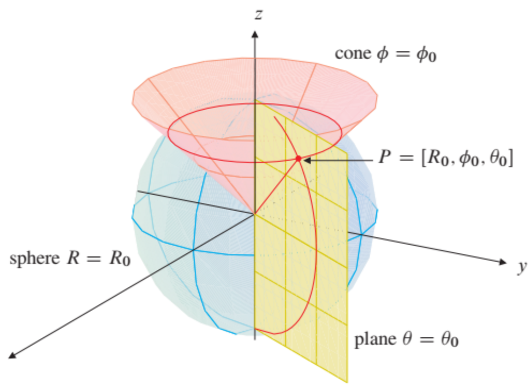
مختصات کروی:

همانطور که قبلاً دیدیم رابطه زیر بین دستگاه مختصات دکارتی و کروی برقرار است:

$$x = \rho \sin(\phi)\cos(\theta)$$

$$y = \rho \sin(\phi)\sin(\theta)$$

$$z = \rho \cos(\phi)$$



$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\phi,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \sin(\phi)\cos(\theta) & \rho\cos(\phi)\cos(\theta) & -\rho\sin(\phi)\sin(\theta) \\ \sin(\phi)\sin(\theta) & \rho\cos(\phi)\sin(\theta) & \rho\sin(\phi)\cos(\theta) \\ \cos(\phi) & -\rho\sin(\phi) & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \rho^2 \sin(\phi)$$

$$dV = \rho^2 \sin(\phi)\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

یادآوری :

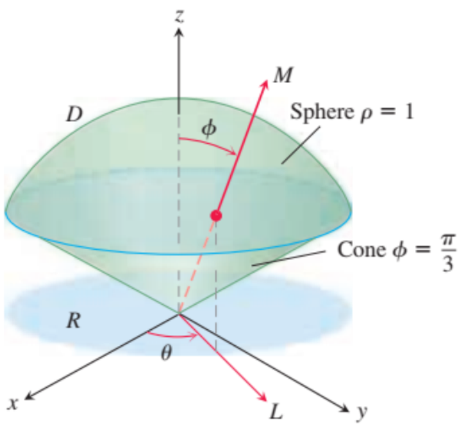
$$\rho^2 = x^2+y^2+z^2 = r^2+z^2$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \rho \sin(\phi)$$

$$tg(\phi) = \frac{r}{z} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} \quad , \quad tg(\theta) = \frac{y}{x}$$

مثال 28 : حجم ناحیه‌ای را بدست آورید که $\phi = \frac{\pi}{3}$ از رویه $\rho \leq 1$ جدا می‌کند.

$$V = \iiint dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\int_0^1 \rho^2 \sin(\phi)\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$



$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3} \sin(\phi) \frac{\rho^3}{3}\Big|_{\rho=0}^{1} d\phi\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3} \frac{\sin(\phi)}{3} d\phi\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} -\frac{\cos(\phi)}{3}\Big|_{\phi=0}^{\pi/3} d\theta$$

$$= \frac{1}{6}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

مثال 29 : صفحه $z=1$ ، کره $\rho = 2$ را به دو قسمت تقسیم می‌کند، حجم قسمت کوچکتر را بیابید.

$$z = 1 \Rightarrow \rho\cos(\phi) = 1 \Rightarrow \rho = \frac{1}{\cos(\phi)}$$

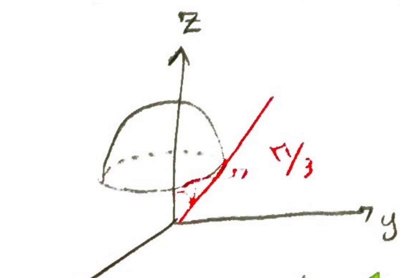
$$x^2+y^2+z^2 = 4$$

$$x^2+y^2+1 = 4 \Rightarrow r^2 = 3 \Rightarrow r = \sqrt{3}$$

$$tg(\phi) = \frac{r}{z} = \sqrt{3} \Rightarrow \phi = \pi/3$$

$$V = \iiint_D dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\int_{\frac{1}{\cos(\phi)}}^{2} \rho^2 \sin(\phi)\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3} \frac{\rho^3}{3}\Big|_{\frac{1}{\cos(\phi)}}^{2} \sin(\phi)\, d\phi\, d\theta$$



$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3} \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3\cos^3(\phi)}\right)\sin(\phi)\, d\phi\, d\theta$$

$$2\cos(\phi) = 1$$

$$\cos(\phi) = 1/2$$

$$\Rightarrow \phi = \pi/3$$

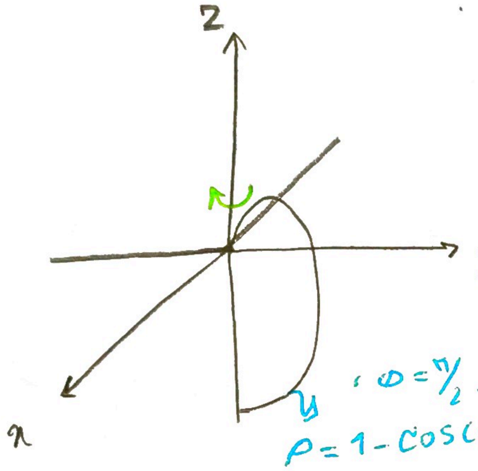
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3} \left(8/3 \sin(\phi) - 1/3 \sec^2(\phi)\, tg(\phi)\right) d\phi\, d\theta$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{3}\left[-8\cos(\phi) - \frac{1}{2}\,tg^2(\phi)\right]\Big|_{\phi=0}^{\pi/3} d\theta$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\left[(-4-\frac{3}{2}) - (-8)\right]d\theta$$

$$= \frac{2\pi}{3}\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{5\pi}{3}$$

مثال ۳۰: حجم محصور در رویه $\rho = 1-\cos(\phi)$ را بیابید.



اگر $\theta = \pi/2$ ،

$\rho = 1-\cos(\phi)$

$0 \le \phi \le \pi$

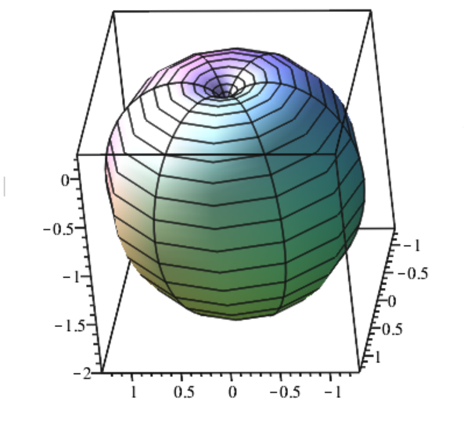
$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1-\cos(\phi)} \rho^2 \sin(\phi)\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\rho^3}{3}\Big|_{\rho=0}^{1-\cos(\phi)} \sin(\phi)\, d\phi\, d\theta$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} (1-\cos(\phi))^3 \sin(\phi)\, d\phi\, d\theta$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} \frac{(1-\cos(\phi))^4}{4}\Big|_{\phi=0}^{\pi} d\theta$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{16} \times 2\pi = \frac{\pi}{24}$$



کاربرد انتگرال دوگانه: برای پیدا کردن جرم، گشتاور اول، گشتاور دوم (گشتاور ماند)، و مرکز جرم یک ورقه نازک که ناحیه D از صفحه را می‌پوشاند و تابع چگالی جرم آن در هر نقطه به صورت $\delta(x,y)$ است، از فرمول های زیر استفاده می کنیم:

جرم: $M = \iint_D \delta(x,y)\, dA$

گشتاور اول حول محور xها: $M_x = \iint_D y\, \delta(x,y)\, dA$

گشتاور اول حول محور yها: $M_y = \iint_D x\, \delta(x,y)\, dA$

مرکز جرم: مرکز جرم نقطه $(\bar{x}, \bar{y})$ است که

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M}$$

گشتاور دوم (گشتاور ماند):

گشتاور دوم حول محور xها: $I_x = \iint_D y^2\, \delta(x,y)\, dA$

گشتاور دوم حول محور yها: $I_y = \iint_D x^2\, \delta(x,y)\, dA$

گشتاور دوم حول مبداء: $I_0 = \iint_D (x^2+y^2)\, \delta(x,y)\, dA = I_x + I_y$

شعاع های چرخش:

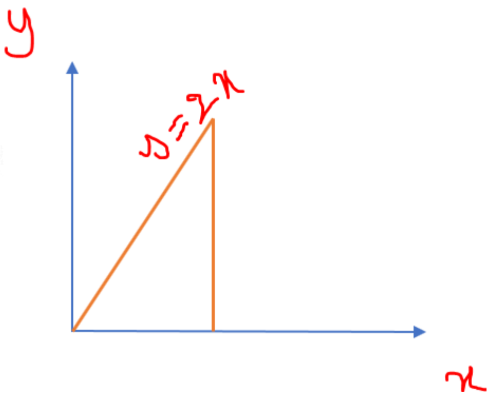
حول محور x: $R_x = \sqrt{\frac{I_x}{M}}$

حول محور y: $R_y = \sqrt{\frac{I_y}{M}}$

حول مبداء: $R_0 = \sqrt{\frac{I_0}{M}}$

تذکر ۵: مرکز جرم جسمی که چگالی آن عدد ثابتی است فقط به هندسه شکل بستگی دارد و به آن مرکزوار می‌گوییم. برای محاسبه مرکزوار کافیست δ برابر 1 گرفته شود.

مثال 31: ورقه نازکی ناحیه مثلثی شکل واقع در ربع اول و محدود به محور x و خطوط $x=1$ و $y=2x$ را می‌پوشاند. چگالی جرم ورقه به صورت $\delta(x,y)=6x+6y+6$ است. مطلوبست تعیین جرم، گشتاورهای اول، مرکز جرم، گشتاورهای ماند و شعاع چرخش حول محورهای مختصات.



$$M=\int_0^1\int_0^{2x}\delta(x,y)\,dy\,dx$$
$$=\int_0^1\int_0^{2x}(6x+6y+6)\,dy\,dx$$
$$=\int_0^1(6xy+3y^2+6y)\Big|_{y=0}^{2x}dx$$
$$=\int_0^1(24x^2+12x)\,dx$$
$$=8x^3+6x^2\Big|_0^1=14$$

$$M_x=\int_0^1\int_0^{2x}y\,\delta(x,y)\,dy\,dx=\int_0^1\int_0^{2x}(6xy+6y^2+6y)\,dy\,dx$$
$$=\int_0^1(3xy^2+2y^3+3y^2)\Big|_{y=0}^{2x}dx=\int_0^1(28x^3+12x^2)\,dx$$
$$=(7x^4+4x^3)\Big|_0^1=11$$

$$M_y=\int_0^1\int_0^{2x}x\,\delta(x,y)\,dy\,dx=\int_0^1\int_0^{2x}(6x^2+6xy+6x)\,dy\,dx$$
$$=\int_0^1(6x^2y+3xy^2+6xy)\Big|_{y=0}^{2x}dx=\int_0^1(24x^3+12x^2)\,dx$$
$$=6x^4+4x^3\Big|_0^1=10$$

$$\bar{x}=\frac{M_y}{M}=\frac{10}{14}=\frac{5}{7},\quad \bar{y}=\frac{M_x}{M}=\frac{11}{14}$$

$$I_x=\int_0^1\int_0^{2x} y^2\,\delta(x,y)\,dy\,dx=\int_0^1\int_0^{2x}(6xy^2+6y^3+6y^2)\,dy\,dx$$

$$=\int_0^1\left(2xy^3+\frac{3}{2}y^4+2y^3\right)\Big|_{y=0}^{2x}dx=\int_0^1(40x^4+16x^3)\,dx$$

$$=(8x^5+4x^4)\Big|_0^1=12$$

$$I_y=\int_0^1\int_0^{2x} x^2\,\delta(x,y)\,dy\,dx=\int_0^1\int_0^{2x}(6x^3+6x^2y+6x^2)\,dy\,dx$$

$$=\int_0^1(6x^3y+3x^2y^2+6x^2y)\Big|_{y=0}^{2x}dx=\int_0^1(24x^4+12x^3)\,dx$$

$$=\left(\frac{24}{5}x^5+3x^4\right)\Big|_0^1=\frac{39}{5}$$

$$I_0=I_x+I_y=12+\frac{39}{5}=\frac{99}{5}$$

$$R_x=\sqrt{\frac{I_x}{M}}=\sqrt{\frac{12}{14}}=\sqrt{\frac{6}{7}}$$

$$R_y=\sqrt{\frac{I_y}{M}}=\sqrt{\frac{\frac{39}{5}}{14}}=\sqrt{\frac{39}{70}}$$

$$R_0=\sqrt{\frac{I_0}{M}}=\sqrt{\frac{99}{70}}$$

کاربرد انتگرال سه‌گانه: اگر چگالی جسم به صورت $\delta(x,y,z)$ باشد، داریم:

جرم:

$$M=\iiint_D \delta(x,y,z)\,dV$$

گشتاور اول حول صفحات مختصات:

$$M_{yz}=\iiint_D x\,\delta(x,y,z)\,dV,\quad M_{xz}=\iiint_D y\,\delta(x,y,z)\,dV$$

$$M_{xy}=\iiint_D z\,\delta(x,y,z)\,dV$$

مرکز جرم: $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ که:

$$\bar{x}=\frac{M_{yz}}{M},\quad \bar{y}=\frac{M_{xz}}{M},\quad \bar{z}=\frac{M_{xy}}{M}$$

گشتاور دوم ماند:

$$I_x = \iiint_D (y^2+z^2)\,\delta(x,y,z)\,dV$$

$$I_y = \iiint_D (x^2+z^2)\,\delta(x,y,z)\,dV, \quad I_z = \iiint_D (x^2+y^2)\,\delta(x,y,z)\,dV$$

گشتاور دوم حول خط دلخواه l برابر است با:

$$I_l = \iiint_D r^2 \delta(x,y,z)\,dV$$

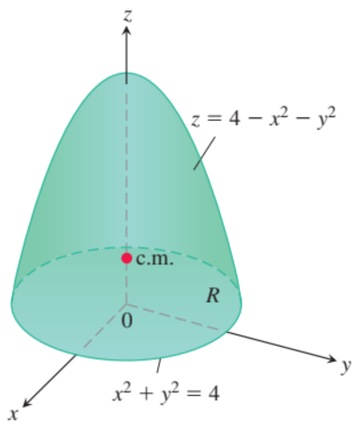
که در آن r فاصله نقطه (x,y,z) تا خط l است.

شعاع چرخش:

$$R_l = \sqrt{\frac{I_l}{M}}$$

مثال 32: مرکز وار جسمی را بیابید که بین رویه $z = 4 - x^2 - y^2$ و صفحه xy قرار دارد.

با توجه به تقارن واضح است که $\bar{x} = \bar{y} = 0$ حال M_{xy} را محاسبه می کنیم:



$$M_{xy} = \iint_R \int_0^{4-x^2-y^2} z\,dz\,dA$$

$$= \iint_R \left[\frac{z^2}{2}\right]_{z=0}^{4-x^2-y^2} dA$$

$$= \iint_R \tfrac{1}{2}(4-x^2-y^2)^2\,dA$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^2 (4-r^2)^2 r\,dr\,d\theta$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(-\tfrac{1}{6}(4-r^2)^3\right)\Big|_{r=0}^{2} d\theta$$

$$= \frac{16}{3}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{32\pi}{3}$$

به همین ترتیب می توان نشان داد که

$$M = \iint_R \int_0^{4-x^2-y^2} dz\,dA = 8\pi$$

پس $\bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{4}{3}$ و لذا مرکز وار جسم برابر است با $(0,0,\frac{4}{3})$