

## آمالیز برداری :

**تعریف :** یک میدان برداری روی دامنه‌ای از فضا یا از صفحه عبارتست از تابعی که به هر نقطه از دامنه، برداری نسبت می‌دهد. یک میدان برداری روی ناحیه  $R$  از صفحه تابعی مانند  $\vec{F}$  است که به هر نقطه از  $R$  برداری مانند  $\vec{F}(x, y)$  نسبت می‌دهد. به همین ترتیب یک میدان برداری روی ناحیه  $Q$  در فضا تابعی مانند  $\vec{F}$  است که به هر نقطه از  $Q$  بردار  $\vec{F}(x, y, z)$  را نسبت می‌دهد.

گرادیان یک مثال از میدان برداری است. برای مثال اگر  $f(x, y) = x^2y + 3xy^3$  باشد،

$$\begin{aligned}\nabla f &= \frac{\partial f}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{j} \\ &= (2xy + 3y^3) \hat{i} + (x^2 + 9xy^2) \hat{j}\end{aligned}$$

یک میدان برداری در صفحه است. به همین ترتیب اگر  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  در این صورت

$$\begin{aligned}\nabla f &= \frac{\partial f}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{k} \\ &= 2x \hat{i} + 2y \hat{j} + 2z \hat{k}\end{aligned}$$

یک میدان برداری در فضا است. توجه کنید که  $\nabla f$  هر میدان اسکالر  $f$  حجت و اندازه بیشترین میزان افزایش  $f$  در نقطه  $(x, y, z)$  را می‌دهد. (توجه کنید که یک تابع چند متغیره حقیقی را یک تابع اسکالری گوئیم)

$$\vec{F}(x, y, z) = M(x, y, z) \hat{i} + N(x, y, z) \hat{j} + P(x, y, z) \hat{k}$$

را در یک نقطه پیوسته گوئیم هرگاه توابع مؤلفه‌ای  $M$ ،  $N$ ،  $P$  در آن نقطه پیوسته باشند. یک میدان برداری را هموار گوئیم هرگاه توابع مؤلفه‌ای آن دارای مشتقات جزئی پیوسته از هم برابر باشند.

در ادامه فرست برخی از میدان های برداری در فیزیک آورده می شود:

1- میدان سرعت  $\vec{V}(x, y, z)$  در یک سیال همراست از سرعت حرکت ذره در نقطه

$(x, y, z)$ . اگر حرکت «یکنواخت» نباشد، آنگاه میدان سرعت به زمان نیز وابسته است و

$$\vec{V} = \vec{V}(x, y, z, t)$$

2- میدان گرانش  $\vec{F}(x, y, z)$  که نیروی جاذبه یک جسم به جرم  $m_2$  که به جسمی به جرم  $m_1$  در

فضا وارد می کند. اگر فرض کنیم که جسم به جرم  $m_2$  در  $(x, y, z)$  قرار داشته باشد،

$$\vec{F}(x, y, z) = -\frac{G m_1 m_2}{x^2 + y^2 + z^2} \hat{u}$$

که در آن  $G$  ثابت گرانش نیوتن و  $\hat{u}$  بردار یک جهت از مبدا به  $(x, y, z)$  است. به کمک بردار

مکان  $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$  می توان میدان گرانش  $\vec{F}$  را به صورت زیر نوشت:

$$\vec{F}(x, y, z) = \frac{-G m_1 m_2}{|\vec{r}|^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{-G m_1 m_2}{|\vec{r}|^3} \hat{u}$$

3- میدان الکتریکی

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}|^2} \hat{u}$$

تعریف: (میدان مربع معکوس) فرض کنید  $\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$  بردار مکان باشد.

میدان برداری  $\vec{F}$  یک میدان مربع معکوس است هرگاه:

$$\vec{F}(x, y, z) = \frac{k}{|\vec{r}|^2} \hat{u}$$

که در آن  $k$  یک عدد حقیقی و  $\hat{u} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$  است.

میدان گرانش و میدان الکتریکی هر دو میدان مربع معکوس است.

تعریف (میدان برداری پایستار): یک میدان برداری را پایستار (ایستایی) گوئیم هرگاه یک

تابع مشتق پذیر مانند  $f$  چنان موجود باشد که  $\vec{F} = \nabla f$  تابع  $f$  را تابع پتانسیل  $\vec{F}$  می گوئیم.

مثال 1:  $\vec{F} = 2x\hat{i} + y\hat{j}$  یک میدان پایستار است چرا که اگر  $f(x, y) = x^2 + \frac{1}{2}y^2$  داریم:

$$\nabla f = 2x\hat{i} + y\hat{j} = \vec{F}$$

پس  $f$  پتانسیل  $\vec{F}$  است.

مثال 2: هر میدان مربع معکوس یک میدان پایستار است. برای اثبات کافایت میدان

برداری را  $\vec{F} = \frac{k}{|\vec{r}|^2} \vec{u}$  و پتانسیل  $f = \frac{-k}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$  در نظر گرفته شود.

$$\nabla f = \frac{kx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \hat{i} + \frac{ky}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \hat{j} + \frac{kz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \hat{k}$$

$$= \frac{k}{(x^2 + y^2 + z^2)} \left( \frac{x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) = \frac{k}{|\vec{r}|^2} \frac{\vec{F}}{|\vec{r}|}$$

$$= \frac{k}{|\vec{r}|^2} \hat{u}$$

قصه (آزمون پایستگی یک میدان برداری): فرض کنید  $M$  و  $N$  توابعی باشند مشتقات جزئی

مرتبه اول پیوسته باشند. در این صورت  $F(x, y) = M\hat{i} + N\hat{j}$  یک میدان برداری پایستار

است اگر و تنها اگر  $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$

مثال 3: پایستگی میدان های برداری زیر را بررسی کنید.

$$1) \vec{F}(x, y) = \underbrace{xy^2}_{M}\hat{i} + \underbrace{x^2y}_{N}\hat{j} \quad \frac{\partial M}{\partial y} = 2xy, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2xy$$

لذا  $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$  پس  $\vec{F}$  پایستار است.

$$2) \vec{F}(x, y) = \underbrace{\sin(y)}_{M}\hat{i} + \underbrace{x \sin(y)}_{N}\hat{j} \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \cos(y), \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \sin(y)$$

پس چون  $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ ،  $\vec{F}$  پایستار نیست.

در مثال زیر نحو. معادله پتانسیل یک میدان برداری بیان می شود.

مثال 4: پتانسیل میدان برداری  $\vec{F}(x, y) = \underbrace{2xy}_{M}\hat{i} + \underbrace{(x^2 - y)}_{N}\hat{j}$  را بیابید.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x = \frac{\partial N}{\partial x} \Rightarrow \vec{F} \text{ پایستار است}$$

پس تابعی چون  $f$  موجود است که  $\nabla f = \vec{F}$  لذا  $\frac{\partial f}{\partial x} = M, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = N$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M = 2xy \Rightarrow f = \int 2xy \, dx = x^2y + h(y) \quad (1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N = (x^2 - y) \Rightarrow f = \int (x^2 - y) \, dy = x^2y - \frac{y^2}{2} + h(x) \quad (2)$$

لذا  $f$  اجتماع (1) و (2) است علاوه ثابت  $C$ . باید دقت کنیم که عملیات تکراری را یک بار

در  $f$  نویسیم:

$$f = x^2y - \frac{y^2}{2} + C$$

**تعریف:** اگر  $\vec{F}$  میدان برداری  $\vec{F} = M\hat{i} + N\hat{j} + P\hat{k}$  به صورت زیر تعریف می شود:

$$\text{curl } \vec{F}(x, y, z) = \nabla \times \vec{F}(x, y, z) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & N & P \end{vmatrix}$$

$$= \left( \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z} \right) \hat{i} - \left( \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial z} \right) \hat{j} + \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \hat{k}$$

توجه کنید که عملگر  $\nabla$  («دل») به صورت  $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k}$  تعریف می شود.

**تذکره:** اگر یک میدان برداری، میدان برداری است. همچنین اگر را تاو یا چغالی گردش

نیز می نامند. میدان برداری  $\vec{F}$  را **غیر چرخشی** می نامیم هرگاه  $\text{curl}(\vec{F}) = \vec{0}$ .

**مثال 5:** اگر  $\vec{F}(x, y, z) = 2xy\hat{i} + (x^2 + z^2)\hat{j} + 2yz\hat{k}$ ، نشان دهید که  $\vec{F}$

غیر چرخشی است.

$$\text{curl}(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy & x^2 + z^2 & 2yz \end{vmatrix} = (2z - 2z)\hat{i} - (0 - 0)\hat{j} + (2x - 2x)\hat{k}$$

لذا  $\vec{F}$  غیر چرخشی است.  $= \vec{0}$

**توضیح (آزمون بایستاری در فضا):** فرض کنید  $M, N, P$  توابعی با مشتقات جزئی اول پیوسته

در گوی باز  $\Omega$  در فضا باشند. میدان برداری

$$\vec{F}(x, y, z) = M\hat{i} + N\hat{j} + P\hat{k}$$

$$\text{curl}(\vec{F}) = \vec{0} \text{ یعنی:}$$

یک میدان بایستار «ایجابی» است هرگاه

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial z}, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$$

مثال 6: با توجه به اینکه در مثال قبل کرل میدان برداری  $\vec{F} = 2xy \hat{i} + (x^2 + z^2) \hat{j} + 2yz \hat{k}$

صفر شد،  $\vec{F}$  یک میدان پایداری در فضاست. حال پتانسیل  $\vec{F}$  را محاسبه می‌کنیم:

$$M = \frac{\partial f}{\partial x} \Rightarrow f = \int M dx \Rightarrow f(x, y, z) = \int 2xy dx = x^2 y + g(y, z)$$

$$N = \frac{\partial f}{\partial y} \Rightarrow f = \int N dy \Rightarrow f(x, y, z) = \int (x^2 + z^2) dy = x^2 y + yz^2 + h(x, z)$$

$$P = \frac{\partial f}{\partial z} \Rightarrow f = \int P dz \Rightarrow f(x, y, z) = \int (2yz) dz = yz^2 + k(x, y)$$

با مقایسه این سه عبارت داریم:

$$f(x, y, z) = x^2 y + yz^2 + C$$

تعریف: دیورانس میدان برداری  $\vec{F}$  یک میدان اسکالر است که به صورت  $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$  تعریف می‌شود. (صفحه)

$$\text{div}(\vec{F}(x, y)) = \vec{\nabla} \cdot \vec{F}(x, y) = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}$$

$$\text{div}(\vec{F}(x, y, z)) = \vec{\nabla} \cdot \vec{F}(x, y, z) = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \quad (\text{فضا})$$

مثال 7: دیورانس میدان برداری  $\vec{F} = x^3 y^2 z \hat{i} + x^2 z \hat{j} + x^2 y \hat{k}$  را بیابید.

$$\text{div}(\vec{F}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 3x^2 y^2 z + 0 + 0 = 3x^2 y^2 z$$

توجه: اگر  $\vec{F} = M \hat{i} + N \hat{j} + P \hat{k}$  یک میدان برداری و  $P, N, M$  توابع با مشتقات

جزئی مرتبه دوم پیوسته باشند، در اینصورت:

$$\text{div}(\text{curl}(\vec{F})) = \vec{0}$$

## انگردال منحنی الخط :

انگردال منحنی الخط یعنی انگردال توابع روی خمها. فرض کنید  $f(x, y, z)$  تابعی باشد که دامنه آن شامل منحنی زیر است :

$$C: \quad \vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k} \quad a \leq t \leq b$$

$$P_0, P_1, \dots, P_n \quad C \text{ را به } n \text{ کسب نقاط}$$

به  $n$  زیر قوس افراز می کنیم و نرم افزار را با  $\| \Delta \|$  نمایش می دهیم که طول بزرگترین زیر قوس است.

و فرض می کنیم طول قوس زیر قوس  $k$  ام برابر با  $\Delta s_k$  باشد. حال نقطه دلخواه  $(x_i, y_i, z_i)$  را در هر زیر قوسی انتخاب می کنیم و مجموع زیر را تشکیل می دهیم :

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta s_i$$

اگر  $f$  تابعی پیوسته باشد و  $C$  یک منحنی هموار باشد ( یعنی  $\vec{r}'(t)$  پیوسته و  $\vec{r}'(t) \neq \vec{0}$  )

می توان نشان داد که مجموع  $S_n$  وقتی که  $\| \Delta \| \rightarrow 0$  به عدد خاصی همگرا می شود که آنرا

انگردال خط تابع  $f$  روی قوس  $C$  می نامیم و با  $\int_C f(x, y, z) ds$  نمایش می دهیم.

$$\int_C f(x, y) ds = \lim_{\| \Delta \| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta s_i$$

$$\int_C f(x, y, z) ds = \lim_{\| \Delta \| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta s_i$$

مشروط بر اینکه حدود فوق موجود باشند.

تصمیم (محاسبه انتگرال خط): فرض کنید  $f$  تابعی پیوسته در یک ناحیه متناهی منحنی هموار

$C$  باشد. اگر  $C$  به کمک تابع برداری  $\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}$  که آن  $a \leq t \leq b$  منحنی

شود، در اینصورت:

$$\int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$$

و اگر  $C$  به کمک تابع برداری  $\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$  که آن  $a \leq t \leq b$

است، منحنی شود، داریم:

$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt$$

$$\left[ \int_C f(x, y, z) ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) |\vec{v}(t)| dt \right]$$

تذکره: اگر  $f(x, y, z) = 1$  در اینصورت:

$$\int_C 1 ds = \int_a^b |\vec{v}(t)| dt = \text{طول قوس } C$$

مثال 8: انتگرال خط  $\int_C (x^2 - y + 3z) ds$  که  $C$  یک پارچه منحنی مطابق شکل زیر است را

محاسبه کنید.

ابتدا معادله پارامتری پارچه را می نویسیم:

$$x = t, \quad y = 2t, \quad z = t \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$



$$\int_C (x^2 - y + 3z) ds = \int_0^1 (t^2 - 2t + 3t) \sqrt{6} dt$$

$$= \sqrt{6} \int_0^1 (t^2 + t) dt = \sqrt{6} \left( \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{5\sqrt{6}}{6}$$

تذکره: فرض کنید  $C$  یک مسیر متشکل از منحنی‌های هموار  $C_1, C_2, \dots, C_n$  باشد. اگر

$f$  روی  $C$  پیوسته باشد، در اینصورت:

$$\int_C f(x, y) ds = \int_{C_1} f(x, y) ds + \int_{C_2} f(x, y) ds + \dots + \int_{C_n} f(x, y) ds$$

مثال 9:  $\int_C x ds$  را که  $C$  یک منحنی به طور قطعی هموار مطابق شکل زیر است

را به دست آورید:

$$C_1: \vec{r}(t) = t\hat{i} + t\hat{j} \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$\vec{v}(t) = \hat{i} + \hat{j} \Rightarrow |\vec{v}(t)| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \int_{C_1} x ds = \int_0^1 t \sqrt{2} dt = \frac{\sqrt{2}}{2} t^2 \Big|_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$C_2: \vec{r}(t) = (1-t)\hat{i} + (1-t)^2\hat{j}, \quad 0 \leq t \leq 1 \text{ از طرفی}$$

$$\vec{v}(t) = -\hat{i} - 2(1-t)\hat{j}$$

$$\Rightarrow |\vec{v}(t)| = \sqrt{1 + 4(1-t)^2}$$

$$\int_{C_2} x ds = \int_0^1 (1-t) \sqrt{1 + 4(1-t)^2} dt$$

$$= -\frac{1}{8} \times \frac{2}{3} (1 + 4(1-t)^2)^{3/2} \Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{12} (5^{3/2} - 1)$$

$$\Rightarrow \int_C x ds = \int_{C_1} x ds + \int_{C_2} x ds = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{12} (5^{3/2} - 1)$$

مثال ۱۰: اگر  $C$  به یک تابع برداری  $0 \leq t \leq 2$   $\vec{r}(t) = t \hat{i} + \frac{4}{3} t^{3/2} \hat{j} + \frac{t^2}{2} \hat{k}$

مشخص شود، مطلوب است  $\int_C (n+2) ds$

$$\vec{v}(t) = \hat{i} + 2t^{1/2} \hat{j} + t \hat{k} \Rightarrow |\vec{v}(t)| = \sqrt{1+4t+t^2}$$

$$\Rightarrow \int_C (n+2) ds = \int_0^2 (t+2) \sqrt{1+4t+t^2} dt$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} (1+4t+t^2)^{3/2} \Big|_0^2$$

$$= \frac{1}{3} (13\sqrt{13} - 1)$$

مثال 11: جرم فضای دایره اکسیند که با تابع برداری زیر مشخص می شود

$$\vec{r}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos(t)\hat{i} + \sin(t)\hat{j} + t\hat{k}), \quad 0 \leq t \leq 6\pi$$

و چگالی آن برابر است با  $\rho(x,y,z) = 1+z$ .

$$\vec{v}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} (-\sin(t)\hat{i} + \cos(t)\hat{j} + \hat{k})$$

$$|\vec{v}(t)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t) + 1} = 1$$

$$\begin{aligned} \text{mass} &= \int_C (1+z) ds = \int_0^{6\pi} \left(\frac{t}{\sqrt{2}} + 1\right) dt = t + \frac{t^2}{2\sqrt{2}} \Big|_0^{6\pi} \\ &= 6\pi \left(1 + \frac{3\pi}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

تذکره 1: انتگرال خط یک میدان اسکالر به نحوه پارامتری شدن خم بستگی ندارد و بدین ترتیب آن بستگی دارد.

تذکره 2: انتگرال خط یک میدان اسکالر به جهت بستگی ندارد.

مثال 9: مطلوب است جرم سیمی که روی منحنی  $C$  فصل مشترک سهمی گون بیضوی

$$z = 2 - x^2 - 2y^2 \quad \text{و استوانه سهمی} \quad z = x^2 \quad \text{بین نقاط} \quad (0, 1, 0) \quad \text{و} \quad (1, 0, 1)$$

یک قسم اول قرار گرفته است و چگالی آن به صورت  $\rho(x,y,z) = xy$  است.

حل: ابتدا منحنی  $C$  را پارامتری می کنیم:

چون  $0 \leq x \leq 1$  لذا  $x = t$  قرار می دهیم از طرفی چون منحنی روی  $z = x^2$  قرار

دارد،  $z = t^2$  و بنابراین از معادله سهمی گون بیضوی داریم:

$$2y^2 = 2 - x^2 - z = 2 - t^2 - t^2 = 2 - 2t^2 \Rightarrow y = \sqrt{1-t^2}$$

$$|\vec{v}(t)| = \sqrt{1^2 + \frac{t^2}{1-t^2} + 4t^2} = \frac{\sqrt{1+4t^2-4t^4}}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$m = \int_C xy \, ds = \int_0^1 t \sqrt{1-t^2} \frac{\sqrt{1+4t^2-4t^4}}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

$$= \int_0^1 t \sqrt{1+4t^2-4t^4} dt = \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{1+4u-4u^2} du \quad u=t^2$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{2-(2u-1)^2} du = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \sqrt{2-v^2} dv \quad v=2u-1$$

$$= \frac{1}{4} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt{2} \cos(t) \sqrt{2} \cos(t) dt \quad \left[ \begin{array}{l} v = \sqrt{2} \sin(t) \\ dv = \sqrt{2} \cos(t) \end{array} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^2(t) dt = \frac{1}{2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{1}{2} (1 + \cos(2t)) dt$$

$$= \frac{1}{4} (t + \frac{1}{2} \sin(2t)) \Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{8} (2) = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} = \frac{\pi+2}{8}$$

## انتگرال خط میدان برداری:

تعریف: فرض کنید  $\vec{F}$  یک میدان برداری پیوسته روی خم هموار  $C$  باشد. به صورت

$$\vec{r}(t), \quad a \leq t \leq b$$

تعریف شده است. انتگرال خط میدان  $\vec{F}$  روی  $C$  به صورت زیر تعریف می شود:

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_C \vec{F} \cdot T ds \\ &= \int_a^b F(x(t), y(t), z(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt \end{aligned}$$

نکته 1: انتگرال فوق راگردشی  $F$  روی  $C$  می نامند. اگر  $\vec{F}$  نیرو در نظر گرفته شود کار انجام شده توسط  $\vec{F}$  برابر با انتگرال فوق خوانده شود.

نکته 2: انتگرال فوق به جهت مسیر بستگی دارد. در واقع اگر  $C$  را همی در خلاف جهت  $C$  در نظر بگیریم:

$$\int_{-C} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

نکته 3: هچنان این انتگرال مستقل از نوع پارامتری کردن مسیر  $C$  است.

مثال: کار انجام شده توسط میدان نیروی

$$\vec{F}(x, y, z) = -\frac{1}{2}x \hat{i} - \frac{1}{2}y \hat{j} + \frac{1}{4} \hat{k}$$

روی ذره ای که در مسیر خم زیر

$$\vec{r}(t) = \cos(t) \hat{i} + \sin(t) \hat{j} + t \hat{k}$$

از نقطه  $(1, 0, 0)$  به نقطه  $(-1, 0, 3)$  حرکت می کند را بیابید.

$$\begin{aligned} W &= \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^3 \left( -\frac{1}{2} \cos(t) \hat{i} - \frac{1}{2} \sin(t) \hat{j} + \hat{k} \right) \cdot \left( -\sin(t) \hat{i} + \cos(t) \hat{j} + \hat{k} \right) dt \\ &= \int_0^3 \left( \frac{1}{2} \sin(t) \cos(t) - \frac{1}{2} \sin(t) \cos(t) + \frac{1}{4} \right) dt \\ &= \int_0^3 \frac{1}{4} dt = \frac{t}{4} \Big|_0^3 = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

مثال 10: فرض کنید  $F(x, y) = y\hat{i} + x^2\hat{j}$  گرادیان  $F$  را روی منحنی  $C$ ،  $y = 4x - x^2$  که نقطه  $(1, 3)$  را به  $(4, 0)$  متصل می‌کند بیابید.

$$x = t, \quad y = 4t - t^2 \quad 1 \leq t \leq 4$$

$$\vec{r}(t) = t\hat{i} + (4t - t^2)\hat{j}$$

$$\vec{r}'(t) = \hat{i} + (4 - 2t)\hat{j}$$

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_1^4 ((4t - t^2)\hat{i} + t^2\hat{j}) \cdot (\hat{i} + (4 - 2t)\hat{j}) dt \\ &= \int_1^4 (4t - t^2 + 4t^2 - 2t^3) dt \\ &= \int_1^4 (4t + 3t^2 - 2t^3) dt = 2t^2 + t^3 - \frac{t^4}{2} \Big|_1^4 = \frac{63}{2} \end{aligned}$$

مثال 11: