$$3)\quad \begin{cases} H_0: P = P_0 \\ H_1: P \neq P_0 \end{cases}$$

اگر $|Z| > Z_{\frac{\alpha}{2}}$ فرض صفر رد و H_1 پذیرفته می‌شود.

مثال: نمونه‌ای مرکب از ۱۰۰ نفر از کارمندان یک بیمارستان را که تماس زیادی با فرآورده‌های خونی یا خون بیماران داشته‌اند برای تشخیص عفونت هپاتیت B مورد آزمایش قرار داده‌اند و نتیجه آزمایش 23 نفر مثبت بوده است. آیا می‌توان از داده‌ها نتیجه گرفت که در جمعیت مورد مطالعه نسبت کسانی که جوابشان مثبت است بیش از 0.15 است؟

$$\begin{cases} H_0: P = 0.15 \\ H_1: P > 0.15 \end{cases}$$

$n = 100,\quad \hat{P} = \frac{23}{100} = 0.23,\quad \alpha = 0.05$ (چون سطح آزمون مشخص نشده)

$$Z = \frac{\hat{P} - P_0}{\sqrt{\frac{P_0 q_0}{n}}} = \frac{0.23 - 0.15}{\sqrt{\frac{0.15 \times 0.85}{100}}} = 2.24$$

$$Z_{0.05} = 1.645$$

لذا چون $Z_{0.05} = 1.645 < Z = 2.24$ فرض H_0 رد و H_1 پذیرفته می‌شود.

آزمون فرض برای اختلاف میانگین در جامعه نرمال با واریانس‌های معلوم:

فرض کنید $X_1, \dots, X_{n_1}$ یک نمونه تصادفی به حجم n_1 از جامعه‌ای نرمال با میانگین μ_1 و واریانس σ_1^2 و همچنین $Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2}$ یک نمونه تصادفی به حجم n_2 از جامعه‌ای نرمال با میانگین μ_2 و واریانس σ_2^2 باشد. در این صورت در مورد اختلاف میانگین‌های $\mu_1 - \mu_2$ سه آزمون فرض زیر را می‌توانیم داشته باشیم:

3) $\begin{cases} H_0: P = P_0 \\ H_1: P \neq P_0 \end{cases}$ اگر $|Z| > Z_{\frac{\alpha}{2}}$ فرض صفر رد و H_1 پذیرفته می‌شود.

مثال: نمونه‌ای مرکب از ۱۰۰ نفر از کارمندان یک بیمارستان را که تماس زیادی با فرآورده‌های خونی یا خون بیماران داشته‌اند برای تشخیص عفونت هپاتیت B مورد آزمایش قرار داده‌اند و نتیجه آزمایش 23 نفر مثبت بوده است. آیا می‌توان از داده‌ها نتیجه گرفت که در جمعیت مورد مطالعه نسبت کسانی که جوابشان مثبت است بیش از 0.15 است؟

$$\begin{cases} H_0: P = 0.15 \\ H_1: P > 0.15 \end{cases}$$

$n = 100, \quad \hat{P} = \frac{23}{100} = 0.23, \quad \alpha = 0.05$ (چون سطح آزمون مشخص نشده)

$$Z = \frac{\hat{P} - P_0}{\sqrt{\frac{P_0 q_0}{n}}} = \frac{0.23 - 0.15}{\sqrt{\frac{0.15 \times 0.85}{100}}} = 2.24$$

$$Z_{0.05} = 1.645$$

لذا چون $Z = 2.24 > Z_{0.05} = 1.645$ فرض H_0 رد و H_1 پذیرفته می‌شود.

آزمون فرض برای اختلاف میانگین دو جامعه نرمال با واریانس‌های معلوم:

فرض کنید $X_1, \ldots, X_{n_1}$ یک نمونه تصادفی به حجم n_1 از جامعه‌ای نرمال با میانگین μ_1 و واریانس σ_1^2 و همچنین $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n_2}$ یک نمونه تصادفی به حجم n_2 از جامعه‌ای نرمال با میانگین μ_2 و واریانس σ_2^2 باشد. در این صورت در مورد اختلاف میانگین‌های $\mu_1 - \mu_2$ سه آزمون فرض زیر را می‌توانیم داشته باشیم:

در سطح معنی دار 0.01 ، $\alpha=0.01$ و $Z_{\frac{\alpha}{2}}=Z_{0.005}=2.58$ پس چون $|Z|$ بزرگتر

از $Z_{\frac{\alpha}{2}}=2.58$ نیست ، پس فرض H_0 پذیرفته و H_1 رد می شود.

اما در سطح معنی دار 0.05 ، $\alpha=0.05$ و $Z_{\frac{\alpha}{2}}=Z_{0.025}=1.96$ پس چون $|Z|>Z_{\frac{\alpha}{2}}$ فرض

H_0 رد و H_1 پذیرفته می شود.

آزمون فرض برای اختلاف میانگین های دو جامعه نرمال با واریانس های مجهول ولی برابر

این حالت مشابه حالت قبل است ولی آماره آزمون به صورت

$$T=\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-d_0}{s_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$$

در نظر می گیریم.

1) $\begin{cases} H_0: \mu_1-\mu_2=d_0 \\ H_1: \mu_1-\mu_2>d_0 \end{cases}$ فرض H_0 رد می شود اگر $t=\frac{(\bar{x}-\bar{y})-d_0}{s_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}>t_{\alpha,n_1+n_2-2}$

2) $\begin{cases} H_0: \mu_1-\mu_2=d_0 \\ H_1: \mu_1-\mu_2<d_0 \end{cases}$ فرض H_0 رد می شود اگر $t=\frac{(\bar{x}-\bar{y})-d_0}{s_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}<-t_{\alpha,n_1+n_2-2}$

3) $\begin{cases} H_0: \mu_1-\mu_2=d_0 \\ H_1: \mu_1-\mu_2\neq d_0 \end{cases}$ فرض H_0 رد می شود اگر $|t|=\left|\frac{(\bar{x}-\bar{y})-d_0}{s_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\right|>t_{\frac{\alpha}{2},n_1+n_2-2}$

مثال : دو کشاورز A و B در مزرعه های خود گندم می کارند. کشاورز A از نوعی کود جدید استفاده

می کند. میانگین برداشت در هر هکتار از 12 هکتار زمین کشاورز A برابر با 139 و انحراف

معیار 10 و در زمین کشاورز B برابر با 131 و انحراف معیار 11 است. آیا در سطح معنی دار 0.05

می توان ادعا کرد که شدآمت جدید در افزایش تولید محصول مؤثر است یا خیر؟

$\bar{x} = 139 ,\ s_1 = 10 ,\ n_1 = 12$

$\bar{y} = 131 ,\ s_2 = 11 ,\ n_2 = 12$

$$s_p^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2} = \frac{11\times 100 + 11\times 121}{12+12-2} = \frac{2431}{22} = 110.5$$

$$s_p = \sqrt{s_p^2} = 10.51$$

$$t = \frac{(\bar{x}-\bar{y}) - d_0}{s_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} = \frac{(139-131)-0}{10.51\sqrt{\frac{1}{12}+\frac{1}{12}}} = 1.85$$

$$\alpha = 0.05 ,\ t_{\alpha, n_1+n_2-2} = t_{0.05,22} = 1.72$$

چون $t=1.85>1.72$ لذا فرض H_0 در سطح معنی داری 0.05 رد و H_1 پذیرفته می شود.

آزمون فرض اختلاف نسبت دو جامعه:

فرض کنید از دو جامعه مستقل با نسبت های P_1 و P_2 نمونه های تصادفی به حجم n_1 و n_2 که $(n_1, n_2 \geq 30)$ گرفته شده است. X_1 و X_2 را به ترتیب تعداد موفقیت ها در نمونه اول و دوم تعریف می کنیم.

همچنین $\hat{P}_1 = \frac{X_1}{n_1}$ و $\hat{P}_2 = \frac{X_2}{n_2}$. اگر فرض $P_1 = P_2 = P$ را داشته باشیم، آنگاه

آمار، آزمون برابر است با

$$Z = \frac{\hat{P}_1 - \hat{P}_2}{\sqrt{\hat{p}\hat{q}\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}$$

که در آن $\hat{p} = \frac{X_1+X_2}{n_1+n_2}$

1) $\begin{cases} H_0: P_1 = P_2 \\ H_1: P_1 > P_2 \end{cases}$

فرض H_0 رد می شود اگر $Z > Z_\alpha$

2) $\begin{cases} H_0: & P_1 = P_2 \\ H_1: & P_1 < P_2 \end{cases}$ فرض H_0 رد می شود اگر $Z < -Z_\alpha$

3) $\begin{cases} H_0: & P_1 = P_2 \\ H_1: & P_1 \neq P_2 \end{cases}$ فرض H_0 رد می شود اگر $|Z| > Z_{\alpha/2}$

مثال: دویست نفر از بیمارانی را که از بیماری خاصی رنج می برند بطور تصادفی به دو گروه مساوی تقسیم کرده اند. از گروه اول، که با روش معمول درمان شده اند، 78 نفر در مدت سه روز بهبودی یافته اند. از گروه دوم، که با روش جدیدی معالجه شده اند 90 نفر در طول سه روز بهبود یافته اند. آیا این اطلاعات دلیل کافی بدست می دهند تا تصور کنیم روش جدید معالجه از روش معمول موثرتر است؟

$$\hat{P}_1 = \frac{78}{100}, \quad n_1 = 100$$

$$\hat{P}_2 = \frac{90}{100}, \quad n_2 = 100, \quad \hat{P} = \frac{X_1 + X_2}{n_1 + n_2} = \frac{78 + 90}{100 + 100} = \frac{168}{200} = 0.84$$

$$\hat{q} = 1 - \hat{P} = 1 - 0.84 = 0.16$$

$$\begin{cases} H_0: & P_1 = P_2 \\ H_1: & P_1 < P_2 \end{cases} \qquad Z = \frac{(0.9 - 0.78)}{\sqrt{(0.84)(0.16)\left(\frac{1}{100} + \frac{1}{100}\right)}} = 2.32$$

$$\alpha = 0.05 \Rightarrow Z_\alpha = Z_{0.05} = 1.645$$

چون $Z > Z_\alpha$ لذا فرض H_0 رد و H_1 پذیرفته می شود.

آزمون فرض برای اختلاف میانگین داده‌های زوجی ($\mu_D = \mu_1 - \mu_2$)

برای یک نمونه تصادفی n تایی در حالتی که داده‌ها زوجی باشند و اختلاف میانگین‌ها را با μ_D نمایش دهیم، آماره آزمون به صورت

$$T = \frac{\bar{D} - d_0}{\frac{s_d}{\sqrt{n}}} \sim t(n-1)$$

خواهد بود و آزمون‌های فرض زیر را داریم:

1) $\begin{cases} H_0: \mu_D = d_0 \\ H_1: \mu_D > d_0 \end{cases}$

فرض H_0 رد می‌شود اگر $t = \frac{\bar{d} - d_0}{\frac{s_d}{\sqrt{n}}} > t_{\alpha, n-1}$

2) $\begin{cases} H_0: \mu_D = d_0 \\ H_1: \mu_D < d_0 \end{cases}$

فرض H_0 رد می‌شود اگر $t = \frac{\bar{d} - d_0}{\frac{s_d}{\sqrt{n}}} < -t_{\alpha, n-1}$

3) $\begin{cases} H_0: \mu_D = d_0 \\ H_1: \mu_D \neq d_0 \end{cases}$

فرض H_0 رد می‌شود اگر $|t| = \left| \frac{\bar{d} - d_0}{\frac{s_d}{\sqrt{n}}} \right| > t_{\frac{\alpha}{2}, n-1}$

مثال: دوازده بیمار در آزمایشی، که به منظور مطالعه تأثیر رژیم غذایی معینی در کاهش سطح کلسترول سرم صورت می‌گیرد، شرکت دارند. جدول زیر سطوح کلسترول را قبل و بعد از شروع برنامه نشان می‌دهد. آیا داده‌ها در سطح معنی‌داری 0.05 نشان می‌دهد که این رژیم غذایی باعث کاهش سطح کلسترول خون می‌شود؟

قبل	201	231	221	260	228	237	326	235	240	267
بعد										

کلسترول قبل	کلسترول بعد	تفاوت d_i
201	200	-1
231	236	5
221	216	-5
260	233	-27
228	224	-4
237	216	-21
326	296	-30
235	195	-40
240	207	-33
267	247	-20
284	210	-74
201	209	8

$$\begin{cases} H_0: \mu_d = 0 \\ H_1: \mu_d < 0 \end{cases}$$

$$\bar{d} = -20.17 \,,\quad s_d^2 = 535.06$$

$$t = \frac{\bar{d} - d_0}{\frac{s_d}{\sqrt{n}}} = \frac{-20.17 - 0}{\sqrt{\frac{535.06}{12}}} = -3.02$$

$$\alpha = 0.05 \Rightarrow t_{\alpha, n-1} = t_{0.05, 11} = 1.795$$

حال اگر $t < -t_{\alpha,n-1}$ فرض H_0 رد می شود چون

$$t = -3.02 < -1.795 = -t_{0.05,11}$$

لذا فرض H_0 رد می شود.

آزمون فرض واریانس: