انتگرال خط میدان برداری:

تعریف: فرض کنید $\vec{F}$ یک میدان برداری پیوسته روی خم هموار C باشد که به صورت

$$\vec{r}(t), \qquad a \le t \le b$$

تعریف شده است. انتگرال خط میدان $\vec{F}$ روی C به صورت زیر تعریف می‌شود:

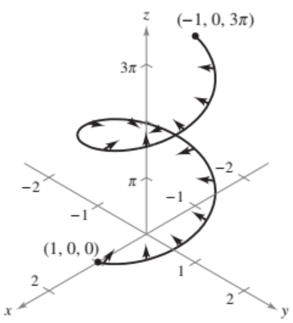
$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_C \vec{F}\cdot\vec{T}\,ds$$
$$= \int_a^b F(x(t), y(t), z(t))\cdot\vec{r}\,'(t)\,dt$$

نکته 1: اگر $\vec{F}$ نیرو باشد انتگرال خط $\vec{F}$ روی C کار انجام شده توسط $\vec{F}$ در جابجایی یک ذره روی منحنی C از $\vec{r}(a)$ تا $\vec{r}(b)$ است.

نکته 2: انتگرال فوق به جهت مسیر بستگی دارد. در واقع اگر $-C$ را خمی در خلاف جهت C در نظر بگیریم:

$$\int_{-C} \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

نکته 3: همچنان این انتگرال مستقل از نوع پارامتری کردن مسیر C است.



مثال: کار انجام شده توسط میدان نیروی

$$\vec{F}(x,y,z) = -\tfrac{1}{2}x\,\hat{i} - \tfrac{1}{2}y\,\hat{j} + \tfrac{1}{4}\hat{k}$$

روی ذره‌ای که در مسیر خم زیر

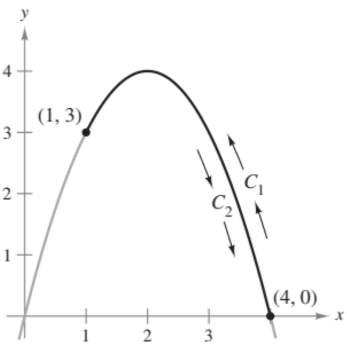
$$\vec{r}(t) = \cos(t)\,\hat{i} + \sin(t)\,\hat{j} + t\,\hat{k}$$

از نقطه $(1,0,0)$ به نقطه $(-1,0,3\pi)$ حرکت می‌کند را بیابید.

$$W = \int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^{3\pi} \left(-\tfrac{1}{2}\cos(t)\,\hat{i} - \tfrac{1}{2}\sin(t)\,\hat{j} + \hat{k}\right)\cdot\left(-\sin(t)\,\hat{i} + \cos(t)\,\hat{j} + \frac{\hat{k}}{4}\right)dt$$
$$= \int_0^{3\pi}\left(\tfrac{1}{2}\sin(t)\cos(t) - \tfrac{1}{2}\sin(t)\cos(t) + \frac{1}{4}\right)dt$$
$$= \int_0^{3\pi}\frac{1}{4}\,dt = \frac{t}{4}\Big|_0^{3\pi} = \frac{3\pi}{4}$$

مثال ۱۰: فرض کنید $\vec{F}(x,y) = y\hat{i} + x^2\hat{j}$ ، انتگرال خط $\vec{F}$ را روی منحنی C ، $y = 4x - x^2$

که نقطه $(1,3)$ را به $(4,0)$ متصل می‌کند بیابید.



$$x = t, \quad y = 4t - t^2 \qquad 1 \le t \le 4$$

$$\vec{r}(t) = t\hat{i} + (4t - t^2)\hat{j}$$

$$\vec{r}'(t) = \hat{i} + (4 - 2t)\hat{j}$$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_1^4 \left((4t - t^2)\hat{i} + t^2\hat{j}\right) \cdot \left(\hat{i} + (4 - 2t)\hat{j}\right) dt$$

$$= \int_1^4 (4t - t^2 + 4t^2 - 2t^3)\, dt$$

$$= \int_1^4 (4t + 3t^2 - 2t^3)\, dt = 2t^2 + t^3 - \frac{t^4}{2} \Big|_1^4 = \frac{69}{2}$$

تذکر: اگر C یک منحنی بسته باشد انتگرال خط $\vec{F}$ روی C را گردش $\vec{F}$ روی C می‌نامند

برای نمایش بسته بودن منحنی اغلب از یک دایره کوچک روی انتگرال استفاده می‌کنند:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

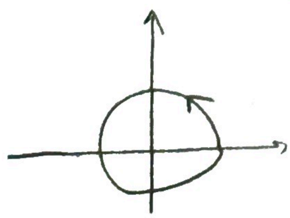
مثال ۱۱: گردش میدان برداری $\vec{F} = (x - y)\hat{i} + x\hat{j}$ روی $\vec{r}(t) = \cos(t)\hat{i} + \sin(t)\hat{j}$

که $0 \le t \le 2\pi$ بیابید.

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \left((\cos(t) - \sin(t))\hat{i} + \cos(t)\hat{j}\right) \cdot \left(-\sin(t)\hat{i} + \cos(t)\hat{j}\right) dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-\sin(t)\cos(t) + \sin^2(t) + \cos^2(t)\right) dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (1 - \sin(t)\cos(t))\, dt = t - \frac{\sin^2(t)}{2} \Big|_0^{2\pi} = 2\pi$$



فرم دیفرانسیلی انتگرال خط: با توجه به اینکه اگر $\vec{F} = M\hat{i} + N\hat{j}$ باشد، داریم:

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_C F \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}\, dt = \int_a^b (M\hat{i} + N\hat{j})\cdot(x'(t)\hat{i} + y'(t)\hat{j})\, dt$$

$$= \int_a^b \left(M\frac{dx}{dt} + N\frac{dy}{dt}\right) dt = \int_C M\,dx + N\,dy$$

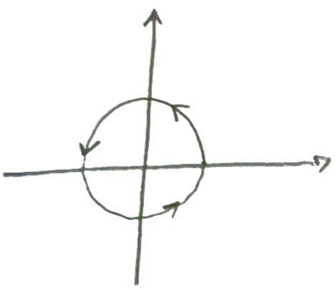
فرم اخیر را فرم دیفرانسیلی انتگرال خط گوییم. در حالت کلی به طور خلاصه:

$$\int_C \vec{F}(x,y)\, d\vec{r} = \int_C M\,dx + N\,dy$$

و اگر $\vec{F} = M\hat{i} + N\hat{j} + P\hat{k}$، داریم:

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_C M\,dx + N\,dy + P\,dz$$

مثال 12: فرض کنید C دایره‌ای به شعاع 3 به صورت زیر باشد:



انتگرال خط

$$\int_C y^3 dx + (x^3 + 3xy^2)\, dy$$

را محاسبه کنید. $x = 3\cos(t),\ y = 3\sin(t) \quad 0 \le t \le 2$

$$\Rightarrow \int_C y^3\, dx + (x^3 + 3xy^2)\, dy = \int_0^2 \Big[(27\sin^3(t))(-3\sin(t)) + (27\cos^3(t) + 81\cos(t)\sin^2(t))(3\cos(t))\Big] dt$$

$$= 81\int_0^2 (\cos^4(t) - \sin^4(t) + 3\cos^2(t)\sin^2(t))\, dt$$

$$= 81\int_0^2 (\cos^2(t) - \sin^2(t)) + \frac{3}{4}\sin^2(2t)\, dt$$

$$= 81\int_0^2 \left[\cos(2t) + \frac{3}{4}\times\frac{1}{2}(1 - \cos(4t))\right] dt$$

$$= 81\left[\frac{\sin(2t)}{2} + \frac{3}{8}t - \frac{3}{32}\sin(4t)\right]\Big|_0^2$$

$$= \frac{243}{4}$$

قضیه اساسی انتگرال های خط: فرض کنید C یک خم قطعه‌ای هموار درون ناحیه باز R باشد که معادله پارامتری آن به صورت $a \leq t \leq b$ و $\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}$ است. اگر

$$\vec{F}(x,y) = M\hat{i} + N\hat{j}$$

یک میدان برداری پایستار در R باشد و M و N پیوسته باشند، داریم:

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_C \nabla f\cdot d\vec{r}$$

$$= f(x(b), y(b)) - f(x(a), y(a))$$

که در آن f پتانسیل میدان برداری $\vec{F}$ است یعنی $\nabla f = \vec{F}$.

این قضیه در فضا نیز درست است و به صورت زیر تبدیل می‌شود:

اگر $\vec{F} = M\hat{i} + N\hat{j} + P\hat{k}$ پایستار باشد،

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = f(x(b), y(b), z(b)) - f(x(a), y(a), z(a))$$

مثال 13: انتگرال خط $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ را که در آن C یک خم قطعه‌ای هموار از $(1,1,0)$ به $(0,2,3)$ است و

$$\vec{F}(x,y,z) = 2xy\,\hat{i} + (x^2+z^2)\,\hat{j} + 2yz\,\hat{k}$$

به دست آورید.

به سادگی می‌توان نشان داد که

$$\text{curl}(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy & x^2+z^2 & 2yz \end{vmatrix} = \vec{0}$$

پس $\vec{F}$ یک میدان برداری پایستار است. حال پتانسیل $\vec{F}$ را پیدا می‌کنیم که با توجه به مثال 6 داریم:

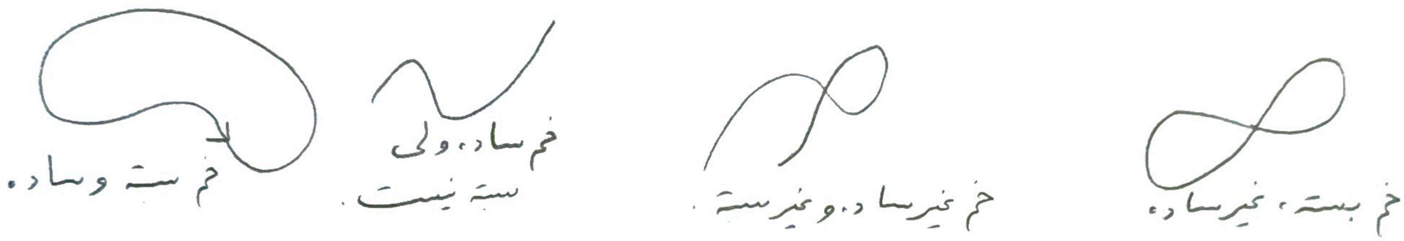
$$\Rightarrow \quad f = x^2y + yz^2 + C$$

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = f(0,2,3) - f(1,1,0) = 13$$

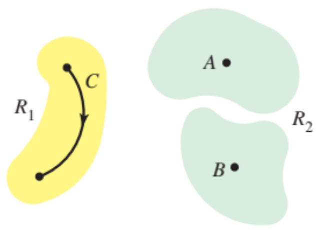
استقلال از مسیر:

تعریف: خم $(\vec{r}(t)$ ، $a \le t \le b)$ را بسته گویند هرگاه $\vec{r}(a)=\vec{r}(b)$. خم را ساده گویند هرگاه خودش را بغیر از احتمالاً در ابتدا و انتها قطع نکند.

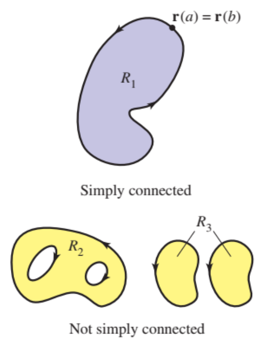
تعریف: اگر با افزایش t از a به b جهتی ایجاد شود خم را جهت دار گوییم و خم $-C$ خمی است که در خلاف جهت C پیموده شود.



تعریف: یک ناحیه در صفحه (یا فضا) را همبند گوییم هرگاه هر دو نقطه آن را بتوان به یک خم قطعه‌ای هموار که از داخل ناحیه عبور می‌کند متصل کرد. یک ناحیه همبند را همبند ساده گوییم هرگاه هر منحنی بسته و ساده در آن فقط نقاطی را محصور کند که در خود ناحیه باشد. به عبارت دیگر یک ناحیه همبند را همبند ساده گوییم هرگاه شامل حفره نباشد. ناحیه همبندی که ساده نباشد را مرکب گوییم.

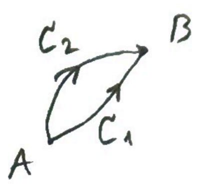


R_1 is connected. R_2 is not connected.



تعریف: اگر $\vec{F}$ یک میدان برداری پیوسته با دامنه D باشد، انتگرال خط $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ را مستقل از مسیر گوییم هرگاه برای هر دو مسیر C_1 و C_2 در D با نقاط ابتدایی و انتهایی مشترک داشته باشیم:

$$\int_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{C_2} \vec{F}\cdot dr$$



قضیه: اگر $\vec{F}$ یک میدان برداری پیوسته روی یک ناحیه همبند بازی باشد، در اینصورت انتگرال خط $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ مستقل از مسیر است اگر و تنها اگر $\vec{F}$ پایستار باشد.

مثال 14: کار انجام شده توسط میدان برداری $\vec{F} = e^x\cos(y)\,\hat{i} - e^x\sin(y)\,\hat{j} + 2\hat{k}$ را روی مسیر C که نقاط $(0, \pi/2, 1)$ را به $(1, \pi, 3)$ وصل می‌کند بیابید.

$$\operatorname{curl}(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ e^x\cos(y) & -e^x\sin(y) & 2 \end{vmatrix} = \vec{0}$$

لذا $\vec{F}$ پایستار است.

حال پتانسیل f را می‌یابیم.

$$f = \int e^x\cos(y)\,dx = e^x\cos(y) + g(y,z)$$

$$f = \int -e^x\sin(y)\,dy = e^x\cos(y) + h(x,z)$$

$$f = \int 2\,dz = 2z + k(x,y)$$

$$f = e^x\cos(y) + 2z + c$$

$$w = \int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = f(1,\pi,3) - f(0,\pi/2,1) = 4 - e$$

نتیجه: اگر $\vec{F}$ یک میدان برداری پایستار باشد، $\int_C \vec{F}\cdot dr$ روی هر خم بسته صفر است

اگر F پایستار باشد $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$

شرایط زیر معادلند:

1- میدان $\vec{F}$ پایستار باشد ($\operatorname{curl}(F) = 0$)، یعنی $F = \nabla f$.

2- $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ مستقل از مسیر است.

3- $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$ برای هر منحنی بسته C.

تذکر: گاهی گرچه میدان برداری $\vec{F}$ ابقایی نیست ولی نوشتن آن به صورت مجموع یک میدان ابقایی و یک میدان دیگر جهت محاسبه انتگرال خط می‌تواند مفید باشد.

مثال 15: مطلوبست محاسبه

$$I = \oint_C \underbrace{(e^x \sin(y) + 3y)}_{M} dx + (\underbrace{e^x \cos(y) + 2x - 2y}_{N}) dy$$

خلاف عقربه‌های ساعت حول بیضی $4x^2 + y^2 = 4$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = e^x \cos(y) + 3 \neq \frac{\partial N}{\partial x} = e^x \cos(y) + 2$$

پس $\vec{F}$ پایستار نیست ولی اگر در M به جای $3y$، $2y$ قرار دهیم پایستار می‌شود.

لذا $\vec{F}$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\vec{F} = \underbrace{(e^x \sin(y) + 2y)\,\hat{i} + (e^x \cos(y) + 2x - 2y)\,\hat{j}}_{\vec{F}_1} + y\,\hat{i}$$

که پایستار است.

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \underbrace{\oint_C \vec{F}_1 \cdot d\vec{r}}_{0} + \oint_C y\, dx$$

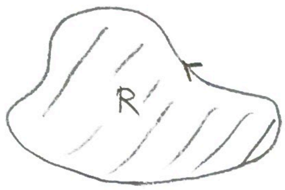
$$\Rightarrow \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_C y\, dx \qquad \vec{r}(t) = \cos(t)\,\hat{i} + 2\sin(t)\,\hat{j} \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

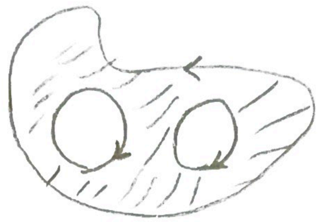
$$= \int_0^{2\pi} 2\sin(t)\,(-\sin(t))\, dt = -2\int_0^{2\pi} \tfrac{1}{2}\,(1 - \cos(2t))\, dt = -2\pi$$

قضیه گرین: فرض کنید R یک ناحیه منظم بسته در صفحه است که مرز آن، C شامل یک یا با تعداد بیشتری منحنی بسته ساده، قطعه‌ای هموار است که نسبت به R دارای جهت مثبت هستند (یعنی اگر روی C حرکت کنیم ناحیه R سمت چپ ما قرار دارد) در اینصورت اگر M و N مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته داشته باشند (لااقل در R) در اینصورت:

$$\oint_C M\, dx + N\, dy = \iint_R \underbrace{\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)}_{|\text{curl}\,\vec{F}|} dA$$

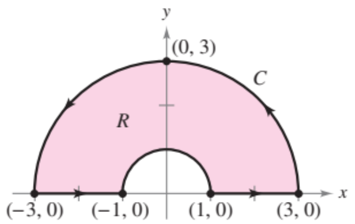
توجه کنید که اگر C یک منحنی بسته ساده باشد که R را محصور کرده، در اینصورت جهت مثبت C در خلاف عقربه‌های ساعت خواهد بود. امّا اگر R دارای حفره‌هایی باشد جهت مثبت در حفره‌ها ساعتگرد است:





مثال 16: به کمک قضیه گرین انتگرال خط زیر را محاسبه کنید:

$$\int_C (tg^{-1}(x)+y^2)\,dx+(e^y-x^2)\,dy$$



$$\int_C (tg^{-1}(x)+y^2)\,dx+(e^y-x^2)\,dy$$

$$=\iint_R (-2x-2y)\,dA$$

$$=\int_0^{\pi}\int_1^3 -2r(\cos(\theta)+\sin(\theta))\,r\,dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{\pi} -2(\cos(\theta)+\sin(\theta))\frac{r^3}{3}\Big|_1^3$$

$$=-\frac{52}{3}\left[\sin(\theta)-\cos(\theta)\right]_0^{\pi}=\frac{-104}{3}$$

مثال 17: به کمک قضیه گرین انتگرال

$$\int_C (y^2-x)\,dy+(x^2+2xy)\,dx$$

که در آن C منحنی حاصل از تلاقی $z=-x^2-y^2+5$ با صفحه xy است

را بیابید.

$C: x^2+y^2=5 \qquad D=x^2+y^2\le 5$

$$\int_C (y^2-x)\,dy+(x^2-2xy)\,dx=\iint_D (-1-2x)\,dA$$

$$-\iint_D (1+2x)\,dA=-\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt5}(1+2r\cos(\theta))\,r\,dr\,d\theta$$

$$=-\int_0^{2\pi}\left(\frac{r^2}{2}+\frac{2}{3}r^3\cos(\theta)\right)\Big|_0^{\sqrt5}d\theta$$

$$= -\int_0^{2\pi} \left(\frac{5}{2} + \frac{2}{3}\, 5\sqrt{5}\cos(\theta)\right) d\theta = \frac{5}{2} \times 2\pi = 5\pi$$

محاسبه مساحت به کمک انتگرال خط :

اگر M و N را طوری انتخاب کنیم که $\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 1$ در اینصورت

$$\int_C M\,dx + N\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA = \iint_R dA = A$$

مثلا $N = \frac{x}{2}$ و $M = -\frac{y}{2}$ در اینصورت :

$$\boxed{A = \frac{1}{2}\int_C x\,dy - y\,dy}$$

$$\boxed{A = \int_C x\,dy}, \quad \boxed{A = -\int_C y\,dx}$$

مثال 18 : مساحت ناحیه محصور در بیضی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ را به کمک قضیه گرین به دست آورید.

$$C:\ \vec{r}(t) = a\cos(t)\,\hat{i} + b\sin(t)\,\hat{j} \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

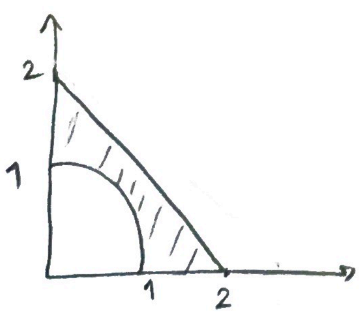
$$A = \int_C \frac{1}{2}(x\,dy - y\,dx)$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\left(a\cos(t) \times b\cos(t)\right) - b\sin(t) \times (-a\sin(t))\,dt$$

$$= \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi} [\cos^2(t) + \sin^2(t)]\,dt = \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi} dt = \pi ab$$

مثال 19 : به کمک قضیه گرین انتگرال خط $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ که در آن $\vec{F} = -y^3\hat{i} + x^3\hat{j}$

را روی منحنی C به دست آورید.



$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_D (3x^2 + 3y^2)\,dA$$

$$= 3\iint_{D_1} (x^2 + y^2)\,dA - 3\iint_{D_2} (x^2 + y^2)\,dA$$

$$= 3\int_0^2 \int_0^{2-x} (x^2 + y^2)\,dy\,dx - 3\int_0^1 \int_0^{\pi/2} r^3\,dr\,d\theta$$

$$= \cdots = 8 - \frac{3\pi}{8}$$

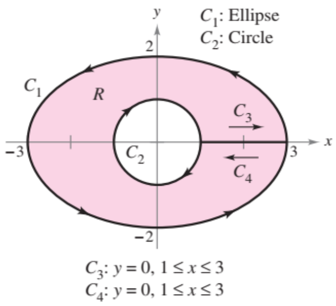
استفاده از قضیه گرین برای نواحی شامل حفره:

مثال 20: انتگرال خط زیر را

$$\int_C 2xy\,dx + (x^2+2x)\,dy$$

که در آن $C = C_1 + C_2$ مرز ناحیه‌ای است که درون بیضی $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ و بیرون دایره $x^2+y^2=1$ است، به دست آورید.

$$\int_C 2xy\,dx + (x^2+2x)\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA$$



$$= \iint_R (2x+2-2x)\,dA$$

$$= 2\iint_R dA = 2(\pi ab - \pi r^2)$$

$$= 2\pi(3)(2) - 2\pi(1)^2 = 10\pi$$