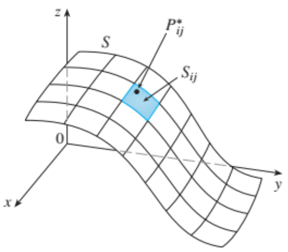
انتگرال سطح : فرض کنید رویه S به کمک معادله $G(x,y,z)=0$ مشخص شود و تصویر یک به یک رویه بر یکی از صفحات مختصات که بردار نرمال آن $\hat{p}$ است، برابر با R باشد. در این صورت



$$d\sigma = \frac{|\nabla G|}{|\nabla G \cdot \hat{p}|}\, dA$$

و داریم :

$$\iint_S f(x,y,z)\, d\sigma = \iint_R f(x,y,z) \frac{|\nabla G|}{|\nabla G \cdot \hat{p}|}\, dA$$

به عنوان مثال اگر S رویه به معادله $z=g(x,y)$ ، و R تصویر این رویه بر صفحه xy باشد ، در اینصورت $\hat{p}=\hat{k}$ و داریم :

$$d\sigma = \frac{|\nabla G|}{|\nabla G \cdot \hat{p}|}\, dA$$

$$G: \quad z - g(x,y)=0 \Rightarrow \nabla G = -\frac{\partial g}{\partial x}\hat{i} - \frac{\partial g}{\partial y}\hat{j} + \hat{k}$$

$$\nabla G \cdot \hat{p} = \nabla G \cdot \hat{k} = 1 \Rightarrow d\sigma = \sqrt{1+g_x^2+g_y^2}\, dA$$

$$\Rightarrow \left[\iint_S f(x,y,z)\, d\sigma = \iint_R f(x,y,g(x,y))\sqrt{1+g_x^2+g_y^2}\, dA\right]$$

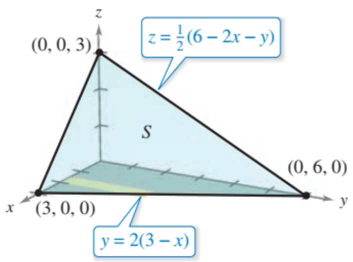
به طور معادل اگر $x=g(y,z)$ ، رویه S را مشخص کند و R تصویر این رویه بر صفحه yz باشد :

$$\iint_S f(x,y,z)\, d\sigma = \iint_R f(g(y,z),y,z)\sqrt{1+g_y^2+g_z^2}\, dA$$

به همین ترتیب اگر S رویه $y = g(x,z)$ باشد و R تصویر این رویه بر صفحه xz داریم:

$$\iint_S f(x,y,z)\,d\sigma = \iint_R f(x,h(x,z),z)\sqrt{1+g_x^2+g_z^2}\;dA$$

مثال: انتگرال سطح $\iint_S (y^2+2yz)\,d\sigma$ را که در آن S بخشی از صفحه $2x+y+2z=6$ است که در یک هشتم اول قرار دارد، محاسبه کنید.



$$z = g(x,y) = \tfrac{1}{2}(6-2x-y)$$

$$\sqrt{1+g_x^2+g_y^2} = \sqrt{1+1+\tfrac{1}{4}} = \frac{3}{2}$$

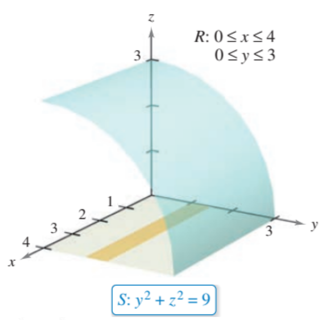
$$\iint_S (y^2+2yz)\,d\sigma = \iint_R \left[y^2+2y\times\left(\tfrac{1}{2}\right)(6-2x-y)\right]\left(\frac{3}{2}\right)dA$$

$$= 3\int_0^3\int_0^{2(3-x)} y(3-x)\,dy\,dx$$

$$= 3\int_0^3 \frac{y^2}{2}(3-x)\Big|_{y=0}^{6-2x} dx = 6\int_0^3 (3-x)^3\,dx$$

$$= -\frac{3}{2}(3-x)^4\Big|_0^3 = \frac{243}{2}$$

مثال: انتگرال سطح $\iint_S (x+z)\,d\sigma$ را که در آن S بخشی از رویه $y^2+z^2=9$ است که در $\frac{1}{8}$ اول و بین صفحات $x=0$ و $x=4$ قرار دارد، محاسبه کنید.



$$z = g(x,y) = \sqrt{9-y^2}$$

$$\sqrt{1+g_x^2+g_y^2} = \sqrt{1+0+\left(\frac{-y}{\sqrt{9-y^2}}\right)^2} = \frac{3}{\sqrt{9-y^2}}$$

$$\iint_S (x+z)\,d\sigma = \lim_{b\to 3^-}\int_0^b\int_0^4 \left(x+\sqrt{9-y^2}\right)\frac{3}{\sqrt{9-y^2}}\,dx\,dy$$

$$= \lim_{b\to 3^-} 3\int_0^b\int_0^4 \left(\frac{x}{\sqrt{9-y^2}}+1\right)dx\,dy = 3\lim_{b\to 3^-}\int_0^b \left(\frac{x^2}{2\sqrt{9-y^2}}+x\right)\Big|_0^4 dy$$

$$= \lim_{b\to 3^-} 3\int_0^b \left(\frac{8}{\sqrt{9-y^2}}+4\right)dy = \lim_{b\to 3^-} 3\left(4y+8\sin^{-1}(y/3)\right)\Big|_0^b$$

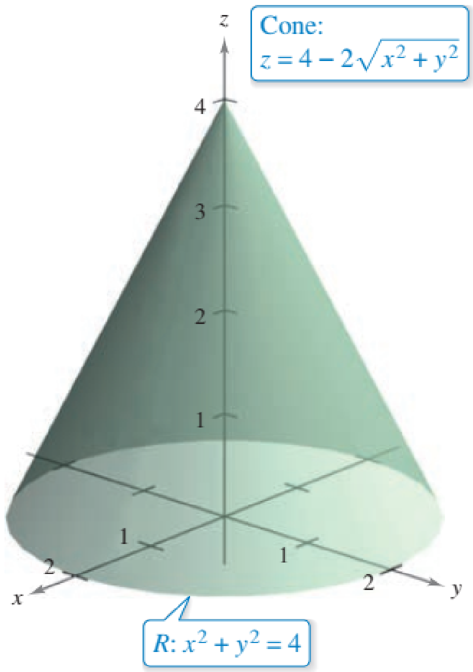
$$= 36 + 12\pi$$

تذکر :

$$\text{مساحت رویه} = \iint_S 1\, d\sigma$$

$$\text{جرم رویه} = \iint_S \underbrace{\rho(x,y,z)}_{\text{چگالی}}\, d\sigma$$

مثال : جرم رویه $z=4-2\sqrt{x^2+y^2}$ ، $0 \le z \le 4$ که در آن چگالی متناسب با فاصله نقاط تا محور z است به دست آورید.



$$(z-4)^2 = 4x^2+4y^2$$

$$m = \iint_S \rho(x,y,z)\, d\sigma$$

$$= \iint_R k\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{1+\frac{4x^2}{x^2+y^2}+\frac{4y^2}{x^2+y^2}}\, dA$$

$$= k\iint_R \sqrt{5}\sqrt{x^2+y^2}\, dA$$

$$= k\int_0^{2\pi}\int_0^2 \sqrt{5}\, r\, r\, dr\, d\theta$$

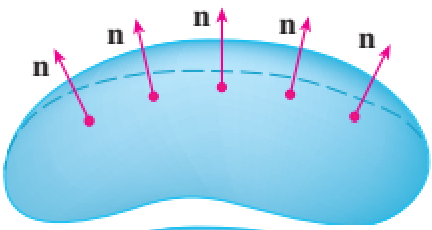
$$= \sqrt{5}k\int_0^{2\pi} \frac{r^3}{3}\Big|_0^2 d\theta = \frac{8\sqrt{5}k}{3}\int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= \frac{16\sqrt{5}k\pi}{3}$$

تعریف: رویه هموار S در فضا را جهت پذیر گویند اگر میدان برداری $\hat{N}(P)$ تعریف شده بر S موجود باشد که با تغییر P بر S این میدان به طور پیوسته تغییر نماید و همه جا بر S عمود باشد. یک چنین میدان برداری نظیر $\hat{N}(P)$ یک جهت S را تعیین می کند.

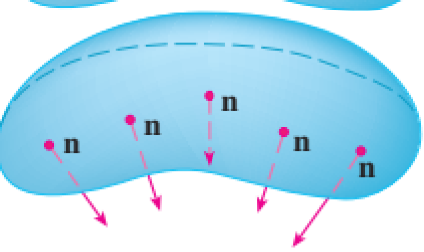
هر رویه جهت داری دو طرف مجزا دارد، قسمت خارجی که $\hat{N}$ به آن اشاره دارد را قسمت مثبت و قسمت دیگر قسمت منفی نام دارد. در رویه های بسته $\hat{N}$ را برون سو انتخاب می کنیم.

اگر رویه S به فرم $G(x,y,z)=0$ تعریف شود، در این صورت



$$\hat{N} = \pm \frac{\nabla G}{|\nabla G|}$$

مثلاً اگر $z=g(x,y)$ داریم:



$$G(x,y,z) = z - g(x,y) = 0$$

$$\hat{N} = \frac{\nabla G}{|\nabla G|} = \frac{-g_x \hat{i} - g_y \hat{j} + \hat{k}}{\sqrt{1+g_x^2+g_y^2}}$$

رو به بالا

یا

$$\hat{N} = -\frac{\nabla G}{|\nabla G|} = \frac{g_x \hat{i} + g_y \hat{j} - \hat{k}}{\sqrt{1+g_x^2+g_y^2}}$$

رو به پایین

تعریف (انتگرال سطح نوع دوم) فرض کنید $\vec{F} = M\hat{i} + N\hat{j} + P\hat{k}$ باشد که در آن M، N و P توابعی با مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته هستند و S یک رویه جهت دار با بردار نرمال یکه $\hat{N}$ باشد، در اینصورت شار $\vec{F}$ گذرنده از رویه S برابر است با انتگرال سطح مولفه قائم $\vec{F}$ روی S:

$$\iint_S \vec{F}\cdot\hat{N}\,d\sigma = \iint_S \vec{F}\cdot d\vec{\sigma}$$

که در اینجا $d\vec{\sigma}$ برابر است با عنصر مساحت رویه برداری

$$d\vec{\sigma} = \hat{N}\,d\sigma$$

اگر S یک رویه بسته باشد و $\hat{N}$ قائم یکه برون سو باشد آنگاه شار، $\vec{F}$ شار خروجی S است و اگر $\hat{N}$ قائم یکه درونسو باشد، آنگاه شار درونسو خواهد بود.

حال فرض کنید S رویه بالا جهت دار شده باشد و رویه‌ای باشد که به کمک $z=g(x,y)$ مشخص شده است بنابراین

$$G(x,y,z)=z-g(x,y)=0$$

$$\hat{N}\,d\sigma = \frac{\nabla G}{|\nabla G|}\,ds = \frac{\nabla G}{\sqrt{1+g_x^2+g_y^2}}\sqrt{g_x^2+g_y^2+1}\,dA$$

$$= \nabla G\,dA = (-g_x\hat{i} - g_y\hat{j} + \hat{k})\,dA$$

پس داریم:

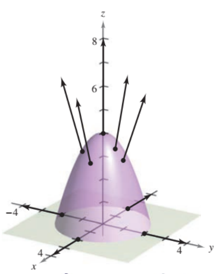
فرض کنید S یک رویه جهت دار به فرم $z=g(x,y)$ باشد و R تصویر آن بر صفحه xy باشد، در اینصورت

اگر رو به بالا باشد

$$\iint_S \vec{F}\cdot\hat{N}\,d\sigma = \iint_R \vec{F}\cdot(-g_x\hat{i} - g_y\hat{j} + \hat{k})\,dA$$

اگر رو به پایین باشد

$$\iint_S \vec{F}\cdot N\,d\sigma = \iint_R \vec{F}\cdot(g_x\hat{i} + g_y\hat{j} - \hat{k})\,dA$$



مثال: فرض کنید S قسمتی از رویه

$$z=g(x,y)=4-x^2-y^2$$

باشد که بالای صفحه xy قرار دارد و به سمت بالا جهت دار شده است. شار میدان برداری $\vec{F}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$ گذرنده از رویه S را بیابید.

$$\iint_S \vec{F}\cdot\hat{N}\,d\sigma = \iint_R F\cdot(-g_x\hat{i} - g_y\hat{j} + k)\,dA$$

$$= \iint_R (x\hat{i}+y\hat{j}+(4-x^2-y^2)\hat{k})\cdot(2x\hat{i}+2y\hat{j}+\hat{k})\,dA$$

$$= \iint_R (2x^2+2y^2+(4-x^2-y^2))\,dA = \iint_R (4+x^2+y^2)\,dA$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 (4+r^2)r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} \left(2r^2+\frac{r^4}{4}\right)\Big|_0^2 d\theta = \int_0^{2\pi} 12\,d\theta$$

$$= 24\pi$$

قضیه دیورژانس :

قضیه دیورژانس در صفحه : فرض کنید R یک ناحیه منظم بسته در صفحه xy باشد که مرز آن C، از یک یا تعدادی بیشتر منحنی بسته ساده، قطعه قطعه هموار تشکیل شده است و فرض کنید $\hat{N}$ بردار نرمال یکه برونسو (نسبت به R) روی C باشد. اگر $\vec{F} = M(x,y)\hat{i}+N(x,y)\hat{j}$ یک میدان برداری هموار روی R باشد آنگاه :

$$\iint_R \operatorname{div}\vec{F}\,dA = \oint_C \vec{F}\cdot\hat{N}\,ds$$

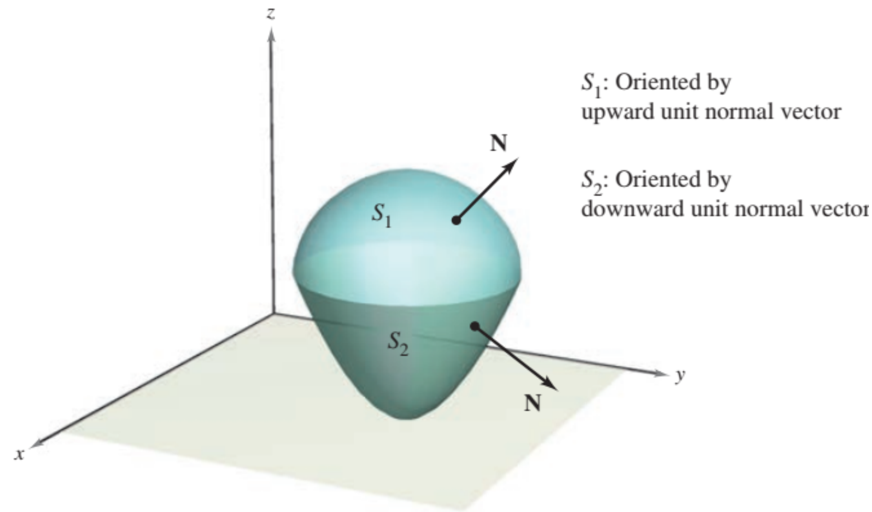
اثبات : اگر $\hat{T}$ یکه مماس در جهت مثبت روی C باشد، در اینصورت $\hat{N}=\hat{T}\times\hat{k}$ بنابراین اگر $\hat{T}=T_1\hat{i}+T_2\hat{j}$ پس $\hat{N}=T_2\hat{i}-T_1\hat{j}$. حال فرض کنید میدان برداری G به صورت زیر باشد :

$$\vec{G} = \underbrace{-N}_{G_1}\hat{i} + \underbrace{M}_{G_2}\hat{j}$$

در اینصورت $\vec{G}\cdot\hat{T} = \vec{F}\cdot\hat{N}$ و بنابراین طبق قضیه گرین،

$$\iint_R \operatorname{div}\vec{F}\,dA = \iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial y}\right)dA$$

$$= \iint_R \left(\frac{\partial G_2}{\partial x}-\frac{\partial G_1}{\partial y}\right)dA = \oint_C \vec{G}\cdot d\vec{r} = \oint_C \vec{G}\cdot\hat{T}\,ds = \oint_C \vec{F}\cdot\hat{N}\,ds$$



قضیه دیورژانس در فضای سه بعدی:

قبل از بیان قضیه دیورژانس در فضای سه بعدی ابتدا دامنه منظم را تعریف می‌کنیم. دامنه سه بعدی D را x-ساده گوییم اگر توسط یک سطح قطعه قطعه هموار مانند S محصور شده باشد و اگر هر خط موازی محور xها که گذرنده از نقاط داخلی D را درنظر بگیریم S را دقیقاً در دو نقطه قطع کند. به همین ترتیب می‌توان نواحی y-ساده و z-ساده را نیز تعریف کرد. دامنه D را منظم گوییم هرگاه اجتماع تعدادی متناهی زیردامنه بدون همپوشانی تشکیل شده باشد که هریک از آنها x-ساده، y-ساده، و z ساده باشند.

قضیه: فرض کنید D یک دامنه سه بعدی منظم است که مرز آن S یک رویه بسته جهت دار با میدان یکه عمود $\hat{N}$ است که به جهت بیرون از D اشاره دارد. اگر $\vec{F}$ یک میدان برداری هموار روی D باشد، دراینصورت:

$$\iiint_D \operatorname{div}\vec{F}\, dV = \iint_S \vec{F}\cdot\hat{N}\, d\sigma$$

مثال 26: فرض کنید $\vec{F} = bxy^2\,\hat{i} + bx^2y\,\hat{j} + (x^2+y^2)z^2\,\hat{k}$ و S یک رویه بسته است که استوانه R را که به صورت $x^2+y^2 \leq a^2$ و $0 \leq z \leq b$ تعریف می‌شود محصور کرده است.

$\iint_S \vec{F}\cdot\hat{N}\,d\sigma$ را به دست آورید.

$$\iint_S \vec{F}\cdot\hat{N}\,d\sigma = \iiint_R \operatorname{div}(\vec{F})\,dV$$

$$= \iiint_R \left(by^2 + bx^2 + 2z(x^2+y^2)\right)dV$$

$$= \iiint_R (x^2+y^2)(b+2z)\,dV$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{a}\int_0^{b} r^2(b+2z)\,r\,dz\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{a} r^3(bz+z^2)\Big|_{z=0}^{b}\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{a} (b^2+b^2)\,r^3\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}(2b^2)\,\frac{r^4}{4}\Big|_0^a\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}(2b^2)\,\frac{a^4}{4}\,d\theta = (2b^2)\,\frac{a^4}{4}\,(2\pi)$$

$$= \pi b^2 a^4$$

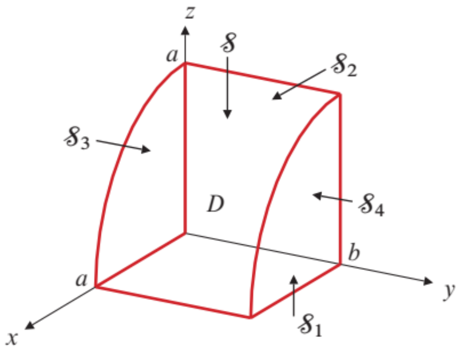
مثال 27: به کمک قضیه دیورژانس $\iint_S (x^2+y^2)\,d\sigma$ را که در آن S کره $x^2+y^2+z^2=a^2$ است را بیابید.

روی S داریم: $\hat{N} = \dfrac{\vec{r}}{a} = \dfrac{x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}}{a}$ حال باید $\vec{F}$ را چنان اختیار کنیم که $\vec{F}\cdot\hat{N}$ برابر x^2+y^2 شود. مثلاً $\vec{F} = ax\hat{i} + ay\hat{j}$ مناسب است پس

$$\iint_S (x^2+y^2)\,d\sigma = \iint_S \vec{F}\cdot\hat{N}\,d\sigma = \iiint_R \operatorname{div}(\vec{F})\,dV$$

$$= \iiint_V 2a\,dV = (2a)\,\frac{4}{3}\pi a^3 = \frac{8}{3}\pi a^4$$

مثال[28]: شار میدان برداری $\vec{F}=x\hat{i}+y^2\hat{j}+z\hat{k}$ گذرا از قسمتی از رویه استوانه‌ای $x^2+z^2=a^2$ ، $0\le y\le b$ که در یک هشتم اول قرار دارد را بیابید که در آن S رو به بالا جهت دار شده است.



$$\iint \vec{F}.\hat{N}\,d\sigma=\iint_{S}\vec{F}.\hat{N}\,d\sigma+\iint_{S_1}\vec{F}.\hat{N}\,d\sigma$$
$$+\iint_{S_2}\vec{F}.\hat{N}\,d\sigma+\iint_{S_3}\vec{F}.\hat{N}\,d\sigma$$
$$+\iint_{S_4}\vec{F}.\hat{N}\,d\sigma$$
$$=\iint_{S}\vec{F}.\hat{N}\,d\sigma+0+0+0+\iint_{S_4}\vec{F}.\hat{N}\,d\sigma$$

اما $\hat{N}$ روی S_4 به صورت $\hat{j}$ است پس $\vec{F}.\hat{N}=y^2=b^2$ پس

$$\iint_{S_4}\vec{F}.\hat{N}\,d\sigma=\frac{\pi a^2b^2}{4}$$

پس

$$\iint_{S\,کل}\vec{F}.\hat{N}\,d\sigma=\iint_{S}\vec{F}.\hat{N}\,d\sigma+\frac{\pi a^2b^2}{4}$$

از طرفی طبق قضیه دیورژانس داریم:

$$\iint_{S\,کل}\vec{F}.\hat{N}\,d\sigma=\iiint_{D}div(\vec{F})\,dV$$

$$=\iiint_{D}(2+2y)\,dV$$
$$=\int_0^{\pi/2}\int_0^{a}\int_0^{b}(2+2y)r\,dy\,dr\,d\theta$$
$$=\int_0^{\pi/2}\int_0^{a}r(2y+y^2)\Big|_{y=0}^{b}\,dr\,d\theta$$
$$=\int_0^{\pi/2}(2b+b^2)\frac{r^2}{2}\Big|_{r=0}^{a}\,d\theta$$
$$=\frac{a^2}{2}(2b+b^2)\pi/2=\frac{a^2b\pi}{4}(2+b)$$

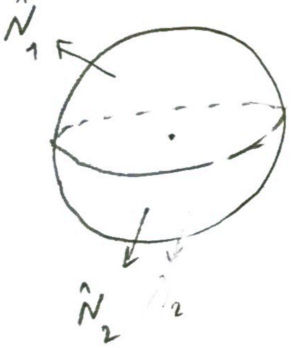
پس:

$$\iint_S \vec{F}\cdot\hat{N}\,d\sigma = \iint_{S_{\text{کل}}} \vec{F}\cdot\hat{N}\,d\sigma - \iint_{S_4} \vec{F}\cdot\hat{N}\,d\sigma$$

$$= \frac{\pi a^2 b}{4}(2+b) - \frac{\pi a^2 b^2}{4} = \frac{\pi a^2 b}{2}$$

مثال[29]: درستی قضیه دیورژانس را برای میدان برداری $\vec{F} = 5z\hat{k}$ روی کره‌ای به مرکز مبدا مختصات و شعاع 3 بررسی کنید.

حل: کره را دو قسمت می‌کنیم یکی نیمکره بالای صفحه xy و آن را رویه S_1 می‌نامیم و دیگری نیمکره پایین صفحه xy و آن را S_2 می‌نامیم. بنابراین چون کره به صورت برونسو جهت‌دار شده است اگر $\hat{N}_1$ را جهت در نیمکره بالا در نظر بگیریم باید $\hat{N}_1$ رو به بالا باشد. و اگر $\hat{N}_2$ را جهت در نیمکره پایین در نظر بگیریم باید $\hat{N}_2$ رو به پایین باشد.



نیمکره بالایی:

$$z = \sqrt{9 - x^2 - y^2} = g(x,y)$$

$$\iint_{S_1} \vec{F}\cdot\hat{N}_1\,d\sigma = \iint_R \vec{F}\cdot(-g_x\hat{i} - g_y\hat{j} + \hat{k})\,dA$$

$$= \iint_R 5z\hat{k}\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{9-x^2-y^2}}\hat{i} + \frac{y}{\sqrt{9-x^2-y^2}}\hat{j} + \hat{k}\right)dA$$

$$= \iint_R 5z\,dA$$

$$= \iint_R 5\sqrt{9-x^2-y^2}\,dA$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^3 5\sqrt{9-r^2}\,r\,dr\,d\theta$$

$$= 5\int_0^{2\pi} -\frac{1}{2}\times\frac{(9-r^2)^{3/2}}{3/2}\Bigg|_{r=0}^{3}\,d\theta$$

$$= 45\times 2\pi = 90\pi$$

$S_2: \; z=-\sqrt{9-x^2-y^2}$

$$\iint_{S_2} \vec{F}.\hat{N}_2\, d\sigma = \iint_R \vec{F}.\,(g_x \hat{i} + g_y \hat{j} - k)\, dA$$

$$= \iint_R (-5\sqrt{9-x^2-y^2}\,\hat{k}).\left(\frac{-x}{\sqrt{9-x^2-y^2}}\hat{i} - \frac{y}{\sqrt{9-x^2-y^2}}\hat{j} - \hat{k}\right) dA$$

$$= 5\iint_R \sqrt{9-x^2-y^2}\, dA = \dots = 90\pi$$

$$\Rightarrow \iint_{S\,(\text{کل کره})} \vec{F}.\hat{N}\, d\sigma = \iint_{S_1} \vec{F}.\hat{N}_1\, d\sigma + \iint_{S_2} \vec{F}.\hat{N}_2\, d\sigma$$

$$= 180\pi$$

حال از قضیه دیورژانس جهت محاسبه انتگرال سطح استفاده می کنیم:

$$\iiint_D div(\vec{F})\, dV = \iiint_D 5\, dV = 5 \times \frac{4}{3}\pi(3)^3 = 180\pi$$

مثال 30: میدان برداری $\vec{F} = x^3\hat{i} + \frac{1}{4}y^3\hat{j} + z^3\hat{k}$ مفروض است. انتگرال شار این میدان برداری را روی سطح بیضی گون $x^2 + \frac{1}{4}y^2 + z^2 = 1$ که به صورت برونسو جهت دار شده است به کمک قضیه دیورژانس محاسبه کنید.

حل:

$$\iint_S \vec{F}.\hat{N}\, d\sigma = \iiint_V div(\vec{F})\, dV$$

$$= \iiint_V \left(3x^2 + \frac{3}{4}y^2 + 3z^2\right) dV$$

حال اگر از تغییر متغیر $u=x$ ، $v=y/2$ و $w=z$ استفاده کنیم داریم:

$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| = \left|\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}\right| = 2$$

و از طرفی بیضی گون $x^2 + \frac{1}{4}y^2 + z^2 = 1$ به کره $u^2 + v^2 + w^2 = 1$ تبدیل می شود

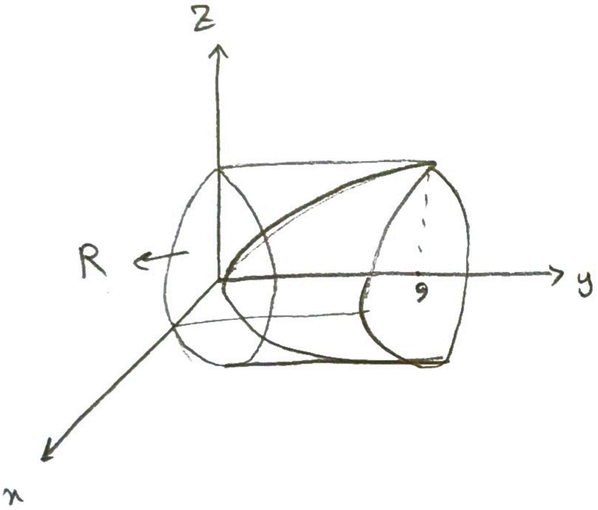
$$\Rightarrow \iint_S \vec{F}.\hat{N}\, d\sigma = \iiint_{V'} 3(u^2+v^2+w^2)\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| du\, dv\, dw$$

$$= 6\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1} \rho^2 \times \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

$$= 6\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin\phi \, \frac{\rho^5}{5}\Big|_{\rho=0}^{1} d\phi \, d\theta = \frac{6}{5}\int_0^{2\pi} -\cos(\phi)\Big|_{\phi=0}^{\pi} d\theta$$

$$= \frac{6}{5} \times 2\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{24}{5}\pi$$

مثال 31 : $\vec{F}(x,y,z) = xz^2\hat{i} + yx^2\hat{j} - 2yz\hat{k}$ و S سطح خارجی جسم محدود به سهمی‌گون بیضوی $y = x^2 + z^2$ و استوانه $x^2 + z^2 = 9$ و صفحه xz باشد. شار $\vec{F}$ بر S را بیابید.



$$\iint_S \vec{F}\cdot\hat{N}\, d\sigma = \iiint_V div(\vec{F})\, dV$$

$$= \iiint_V (z^2 + x^2 - 2y)\, dV$$

$$= \iint_R \int_0^{x^2+z^2} (z^2 + x^2 - 2y)\, dy\, dA$$

$$= \iint_R (z^2 y + x^2 y - y^2)\Big|_{y=0}^{x^2+z^2} dA$$

$$= \iint_R \left[(x^2+z^2)(x^2+z^2) - (x^2+z^2)^2\right] dA$$

$$\begin{bmatrix} x = r\cos(\theta) \\ z = r\sin(\theta) \end{bmatrix}$$

$$= 0$$

قضیه استوکس: فرض کنید S یک رویه جهت دار قطعه قطعه هموار در فضای سه بعدی باشد، که دارای جهت $\hat{N}$ و مرز C است. مرز C از یک یا چند منحنی قطعه قطعه هموار بسته هم جهت با S تشکیل شده است. در اینصورت

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_S curl\,\vec{F}\cdot\hat{N}\,d\sigma$$

تذکر: در بالا گفتیم باید C هم‌جهت با S باشد. در واقع رویه جهت دار S یک جهت بر هر یک از منحنی‌های مرزی اش مانند C القاء می‌کند. اگر روی قسمت مثبت رویه S بایستیم و در امتداد C در جهت القایی حرکت کنیم باید رویه S سمت چپ ما باشد.

مثال: فرض کنید S قسمتی از سهمی‌گون $z=4-x^2-y^2$ باشد که بالای صفحه xy واقع شده است و رو به بالا جهت دار شده و منحنی C مرز رویه S باشد که هم‌جهت با S جهت دار شده است. درستی قضیه استوکس را برای میدان برداری $\vec{F}=2z\,\hat{i}+x\,\hat{j}+y^2\,\hat{k}$ تحقیق کنید.

$$curl(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2z & x & y^2 \end{vmatrix} = 2y\,\hat{i}+2\,\hat{j}+\hat{k}$$

$$z=g(x,y)=4-x^2-y^2$$ رو به بالا

$$\iint_S curl(\vec{F})\cdot\hat{N}\,d\sigma = \iint_R curl(\vec{F})\cdot(-g_x\,\hat{i}-g_y\,\hat{j}+\hat{k})\,dA$$

$$= \iint_R (2y\,\hat{i}+2\,\hat{j}+\hat{k})\cdot(2x\,\hat{i}+2y\,\hat{j}+\hat{k})\,dA = \iint_R (4xy+4y+1)\,d$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 (4r^2\sin(\theta)\cos(\theta)+4r\sin(\theta)+1)\,r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{2} (4r^3 \sin(\theta) \cos(\theta) + 4r^2 \sin(\theta) + r)\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} r^4 \sin(\theta)\cos(\theta) + \frac{4}{3} r^3 \sin(\theta) + \frac{r^2}{2} \Big|_{r=0}^{2} d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} (16 \sin(\theta)\cos(\theta) + \frac{32}{3} \sin(\theta) + 2)\, d\theta$$

$$= 8 \sin^2(\theta) - \frac{32}{3} \cos(\theta) + 2\theta \Big|_0^{2\pi} = 4\pi$$

$$\vec{r}(t) = 2\cos(t)\, \hat{i} + 2\sin(t)\, \hat{j} \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int M\, dx + N\, dy + P\, dz$$

$$= \int 2z\, dx + x\, dy + y^2\, dz$$

$$= \int_0^{2\pi} [0 + (2\cos(t))(2\cos(t)) + 0]\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} 4\cos^2(t)\, dt = 2 \int_0^{2\pi} (1 + \cos(2t))\, dt$$

$$= 2 \left(t + \tfrac{1}{2} \sin(2t) \right) \Big|_0^{2\pi} = 4\pi$$