مروری بر مفهوم حد:

تعریف دقیق حد: فرض کنید تابع f در یک همسایگی محذوف نقطه $x_\circ$ تعریف شده باشد، در اینصورت گوییم حد تابع f وقتی x به سمت $x_\circ$ میل می کند به مقدار L میل می کند و می نویسیم

$$\lim_{x\to x_\circ} f(x) = L$$

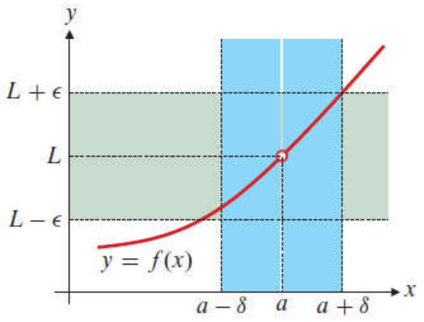


Figure 1.35 If $x \neq a$ and $|x-a| < \delta$, then $|f(x) - L| < \epsilon$

هرگاه برای هر $\varepsilon > \circ$، $\delta > \circ$ ای چنان موجود باشد، احتمالا وابسته به مقدار ε، که

$$\circ < \left|x - x_\circ\right| < \delta \Rightarrow \left|f(x) - L\right| < \varepsilon$$

مثال: به کمک تعریف دقیق حد نشان دهید که

$$\lim_{x\to ۱}(۳x - ۸) = -۵$$

حل: فرض کنید که $\varepsilon > \circ$ دلخواه و از این پس ثابت باشد، باید نشان دهیم مقداری چون $\delta > \circ$ چنان موجود است که

$$\circ < \left|x - ۱\right| < \delta \Rightarrow \left|۳x - ۸ - (-۵)\right| < \varepsilon$$

از طرفی داریم:

$$\left|۳x - ۸ - (-۵)\right| = \left|۳x - ۳\right| = ۳\left|x - ۱\right|$$

لذا کافیست $\delta = \frac{\varepsilon}{۳}$ انتخاب شود.

مثال: به کمک تعریف دقیق حد نشان دهید که

$$\lim_{x\to ۲} x^۲ = ۴$$

با توجه به تعریف حد باید نشان دهیم:

$$\forall\varepsilon > \circ \exists\delta > \circ : \circ < \left|x - ۲\right| < \delta \Rightarrow \left|x^۲ - ۴\right| < \varepsilon$$

از طرفی:

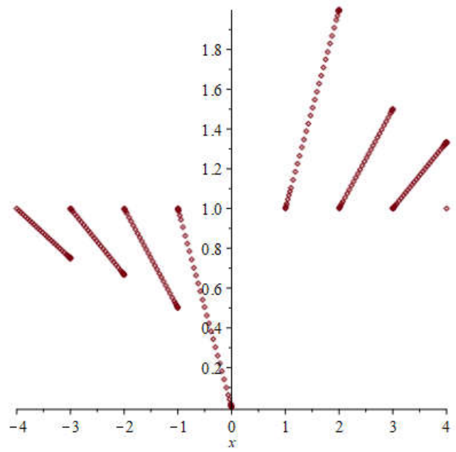
$$\left|x^{۲}-۴\right|=\left|x-۲\right|\left|x+۲\right|\le \delta\left|x+۲\right|$$

اگر $\delta \le ۱$،

$$-۱<x-۲<۱ \Leftrightarrow ۳<x+۲<۵ \Rightarrow \left|x+۲\right|<۵$$

پس $\left|x^{۲}-۴\right|<۵\delta$ لذا کافیست $\delta=\min\{۱,\frac{\varepsilon}{۵}\}$.

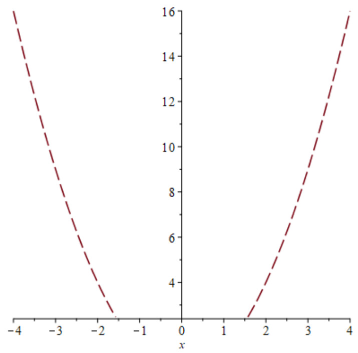
تذکر: طبق تعریف، برای وجود حد تابع f در نقطه $x_۰$، f باید حتما در یک همسایگی محذوف نقطه $x_۰$ تعریف شده باشد.



مثال: نشان دهید تابع $f(x)=\frac{x}{[x]}$ در نقطه صفر حد ندارد.

حل: چون مخرج کسر در این تابع در فاصله $[۰,۱)$ صفر می شود، لذا این تابع در هیچ همسایگی محذوفی از صفر تعریف نمی شود، بنابراین تابع در صفر حد ندارد.

مثال: حد زیر را بررسی کنید.



$$\lim_{x\to ۰}\frac{x^{۲}}{[۱-\cos(x)]}$$

چون در بازه $(-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲})$، $۰<\cos(x)\le ۱$ لذا در این بازه $۰\le ۱-\cos(x)<۱$ بنابراین مخرج کسر در این فاصله برابر با صفر است. پس در این مثال تابع در هیچ همسایگی محذوفی از نقطه صفر تعریف نشده و لذا در این نقطه حد ندارد.

مثال: نشان دهید تابع $f(x)=\frac{۱}{\sin(\frac{۱}{x})}$ در نقطه صفر حد ندارد.

می خواهیم نشان دهیم که این تابع در هیچ $\delta-$ همسایگی محذوفی از نقطه صفر تعریف نشده است. هر همسایگی صفر را که در نظر بگیریم $n \in \mathbb{N}$ ای به اندازه کافی بزرگ چنان موجود است که $\frac{۱}{n\pi}$ در این همسایگی قرار دارد. از طرفی $f(\frac{۱}{n\pi}) = \frac{۱}{\sin(n\pi)} = \frac{۱}{۰}$ که تعریف نشده است.

یادآوری:

تعریف: تابع f را روی I کراندار گوییم هر گاه $M > 0$ ای چنان موجود باشد که به ازای هر $x \in I$ ، $|f(x)| \leq M$.

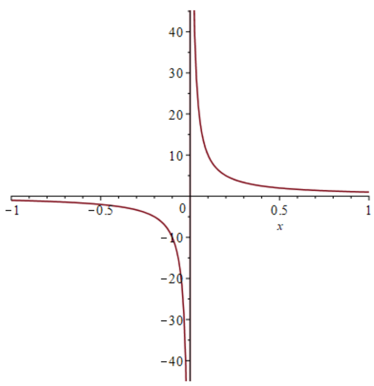
تعریف: تابع f را روی I از بالا کراندار گوییم هر گاه M ای چنان موجود باشد که به ازای هر $x \in I$ ، $f(x) \leq M$.
همچنین تابع f را از پایین کراندار گوییم هرگاه m ای چنان موجود باشد که به ازای هر $x \in I$ ، $m \leq f(x)$.

تذکر: واضح است که اگر f از بالا و پایین کراندار باشد یک تابع کراندار است.

اگر تابع f کراندار نباشد آنرا بی‌کران می‌نامیم.

قضیه: هرگاه $f(x)$ در $x_۰$ حد داشته باشد، $f(x)$ در یک همسایگی محذوف $x_۰$ کراندار است.

مثال: بنابر قضیه فوق تابع $f(x) = \frac{۱}{x}$ در $x = ۰$ حد ندارد.



قضیه: هرگاه $f(x)$ در $x_۰$ حد داشته باشد، این حد منحصر به فرد است.

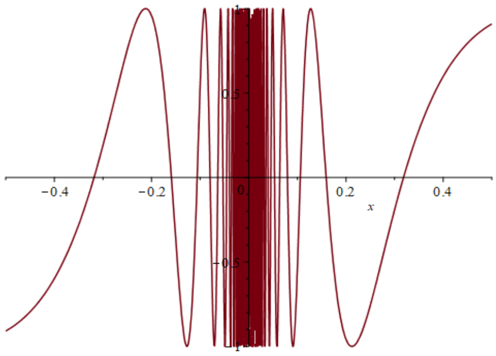
نتیجه: اگر تابع f در $x_۰$ دارای حد L باشد، برای هر دنباله مانند $\{a_n\}$ که $\lim_{n\to\infty} a_n = x_۰$ (جملات دنباله در دامنه تابع و مخالف $x_۰$) باید داشته باشیم:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = L$$

این نتیجه بخصوص برای اثبات عدم وجود حد به کار گرفته می شود.

مثال: نشان دهید که $\lim_{x\to ۰} \sin(\frac{۱}{x})$ موجود نیست.

حل: دنباله های a_n و b_n را به صورت زیر در نظر می گیریم:



$$a_n = \frac{۱}{(۴n+۱)\frac{\pi}{۲}},\ b_n = \frac{۱}{(۴n-۱)\frac{\pi}{۲}}$$

وضوحا $۰ = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n$. اما:

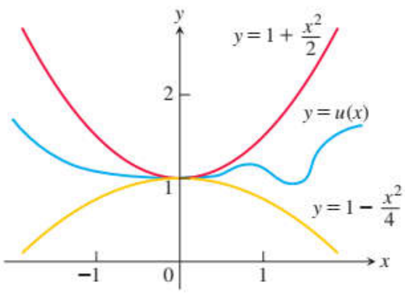
$$\lim_{n\to\infty} \sin(\frac{۱}{a_n}) = \lim_{n\to\infty} \sin(۲n\pi + \frac{\pi}{۲}) = ۱$$
$$\lim_{n\to\infty} \sin(\frac{۱}{b_n}) = \lim_{n\to\infty} \sin(۲n\pi - \frac{\pi}{۲}) = -۱$$

که با نتیجه قبل در تناقض است و این تابع در صفر حد ندارد.

قضیه: اگر $\lim_{x\to x_۰} f(x) = L_۱$ و $\lim_{x\to x_۰} g(x) = L_۲$ آنگاه

$$۱) \lim_{x\to x_۰} f(x) \pm g(x) = L_۱ \pm L_۲$$
$$۲) \lim_{x\to x_۰} f(x)g(x) = L_۱L_۲$$

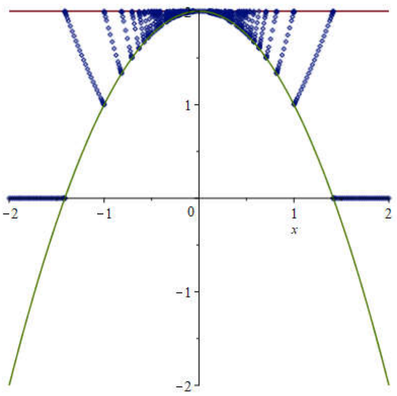
$$۳) \lim_{x\to x_۰} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_۱}{L_۲}$$ اگر $L_۲ \neq ۰$ ،



قضیه فشردگی (ساندویچ[1]): هرگاه $f_۱(x) \leq f(x) \leq f_۲(x)$ در یک همسایگی محذوف $x_۰$ برقرار باشد و $\lim_{x\to x_۰} f_۱(x) = \lim_{x\to x_۰} f_۲(x) = L$ در اینصورت $\lim_{x\to x_۰} f(x) = L$.

[1] Sandwich theorem

مثال: مطلوبست محاسبه $\lim\limits_{x\to ۰} x^{۲}\left[\dfrac{۲}{x^{۲}}\right]$.



$$\frac{۲}{x^{۲}} - ۱ < \left[\frac{۲}{x^{۲}}\right] \le \frac{۲}{x^{۲}} \Rightarrow ۲ - x^{۲} < x^{۲}\left[\frac{۲}{x^{۲}}\right] \le ۲$$

از طرفی $\lim\limits_{x\to ۰} ۲ - x^{۲} = ۲ = \lim\limits_{x\to ۰} ۲$ لذا بنابر قضیه ساندویچ حد تابع $x^{۲}\left[\dfrac{۲}{x^{۲}}\right]$ نیز در صفر موجود ومقدار آن برابر دو است.

یادآوری: $x - ۱ < [x] \le x$.

قضیه: هرگاه $f(x)$ در یک همسایگی محذوفی از $x_۰$ کراندار باشد و $\lim\limits_{x\to x_۰} g(x) = ۰$ آنگاه $\lim\limits_{x\to x_۰} f(x)g(x) = ۰$.

مثال:

$$\lim_{x\to ۰} x \sin\left(\frac{۱}{x}\right) = ۰$$

$$\lim_{x\to ۱} (x^{۲} - ۱)\cos\left(\frac{۱}{x - ۱}\right) = ۰$$

حدود یک طرفه:

حد راست: تابع f در نقطه $x_۰$ دارای حد راست است اگر برای هر $\varepsilon > ۰$، $\delta > ۰$ ای موجود باشد که

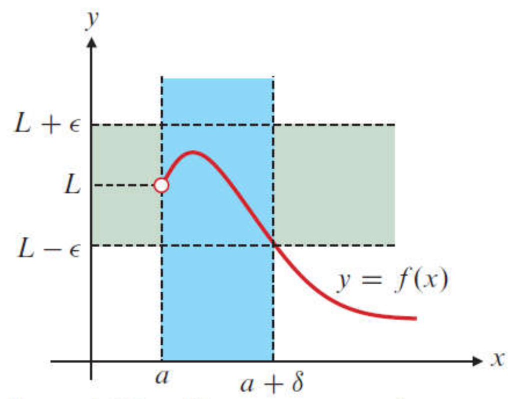


Figure 1.36 If $a < x < a + \delta$, then $|f(x) - L| < \epsilon$

$$x_۰ < x < x_۰ + \delta \Rightarrow \left|f(x) - L\right| < \varepsilon$$

در اینصورت می نویسیم:

$$\lim_{x\to x_۰^{+}} f(x) = L$$

حد چپ: تابع f در نقطه $x_۰$ دارای حد چپ است اگر برای هر $\varepsilon > ۰$، $\delta > ۰$ ای موجود باشد که

$$x_۰ - \delta < x < x_۰ \Rightarrow \left|f(x) - L\right| < \varepsilon$$

در اینصورت می نویسیم:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$$

مثال: نشان دهید تابع $\sqrt{x}$ در صفر دارای حد است.

$$\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$$

فرض کنید $\varepsilon > 0$ می خواهیم نشان دهیم $\delta > 0$ چنان موجود است که

$$0 < x < \delta \Rightarrow \left|\sqrt{x}\right| < \varepsilon$$

پس کافیست $\delta = \varepsilon^2$ در نظر گرفته شود.

قضیه: شرط لازم و کافی برای وجود حد تابع f در x_0 آن است که حد چپ و راست آن موجود بوده و برابر باشند.

مثال: تابع $f(x) = [x]$ اگر $x_0 = n \in \mathbb{Z}$ فاقد حد است زیرا

$$\lim_{x \to n^+} [x] = n, \quad \lim_{x \to n^-} [x] = n - 1$$

مثال: حد تابع $f(x) = \dfrac{|x-2|}{x^2 + x - 6}$ را در نقطه $x_0 = 2$ بررسی کنید.

یاد آوری:
$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{|x-2|}{x^2 + x - 6} = \lim_{x \to 2^+} \frac{(x-2)}{x^2 + x - 6} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to 2^+} \frac{(x-2)}{(x-2)(x+3)} = \lim_{x \to 2^+} \frac{1}{(x+3)} = \frac{1}{5}$$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{|x-2|}{x^2 + x - 6} = \lim_{x \to 2^-} \frac{-(x-2)}{x^2 + x - 6} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to 2^-} \frac{-(x-2)}{(x-2)(x+3)} = \lim_{x \to 2^+} \frac{-1}{(x+3)} = \frac{-1}{5}$$

مثال: حدود زیر را محاسبه کنید.

$$1) \lim_{x \to 1} \frac{4x^5 + 9x + 7}{3x^6 + x^3 + 1} = \frac{4 + 9 + 7}{3 + 1 + 1} = 4$$

$$2) \lim_{x \to 2} \frac{x^3 + 3x^2 - 9x - 2}{x^3 - x - 6} = \frac{0}{0}$$ مبهم

$$= \lim_{x\to ۲} \frac{(x-۲)(x^۲+۵x+۱)}{(x-۲)(x^۲+۲x+۳)} = \lim_{x\to ۲}\frac{x^۲+۵x+۱}{x^۲+۲x+۳} = \frac{۱۵}{۱۱}$$

$$\begin{array}{l|l} x^۳+۳x^۲-۹x-۲ & x-۲ \\ \cline{2-2} x^۳-۲x^۲ & x^۲+۵x+۱ \\ \cline{1-1} \quad ۵x^۲-۹x-۲ & \\ \quad ۵x^۲-۱۰x & \\ \cline{1-1} \qquad x-۲ & \\ \qquad x-۲ & \\ \cline{1-1} \qquad ۰ & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{l|l} x^۳-x-۶ & x-۲ \\ \cline{2-2} x^۳-۲x^۲ & x^۲+۲x+۳ \\ \cline{1-1} \quad ۲x^۲-x-۶ & \\ \quad ۲x^۲-۴x & \\ \cline{1-1} \qquad ۳x-۶ & \\ \qquad ۳x-۶ & \\ \cline{1-1} \qquad ۰ & \end{array}$$

$$۳)\ \lim_{x\to -۱}\frac{x+۱}{\sqrt{۶x^۲+۳}+۳x} \overset{\frac{۰}{۰}}{=} \lim_{x\to -۱}\frac{x+۱}{\sqrt{۶x^۲+۳}+۳x}\,\frac{\sqrt{۶x^۲+۳}-۳x}{\sqrt{۶x^۲+۳}-۳x}$$

$$= \lim_{x\to -۱}\frac{(x+۱)(\sqrt{۶x^۲+۳}-۳x)}{\underbrace{۶x^۲+۳-۹x^۲}_{-۳(x^۲-۱)}} = \lim_{x\to -۱}\frac{\sqrt{۶x^۲+۳}-۳x}{-۳(x-۱)} = ۱$$

$$۴)\ \lim_{x\to\pi}\frac{\sin^۲(x)}{۱+\cos^۳(x)} \overset{\frac{۰}{۰}}{=}$$

$$\lim_{x\to\pi}\frac{۱-\cos^۲(x)}{(۱+\cos(x))(۱-\cos(x)+\cos^۲(x))} \quad [a^۳+b^۳=(a+b)(a^۲-ab+b^۲)]$$

$$= \lim_{x\to\pi}\frac{\big(۱-\cos(x)\big)\big(۱+\cos(x)\big)}{(۱+\cos(x))(۱-\cos(x)+\cos^۲(x))} = \lim_{x\to\pi}\frac{۱-\cos(x)}{۱-\cos(x)+\cos^۲(x)} = \frac{۲}{۳}$$

$$۵)\ \lim_{x\to ۱}\frac{۲x-۲}{\sqrt[۳]{۲۶+x}-۳} = \frac{۰}{۰} \quad [z^۳=۲۶+x \Rightarrow x=z^۳-۲۶]$$

$$= \lim_{z\to ۳}\frac{۲z^۳-۵۴}{z-۳} = \lim_{z\to ۳}\frac{۲(z-۳)(z^۲+۳z+۹)}{z-۳} = \lim_{z\to ۳}۲(z^۲+۳z+۹) = ۵۴$$

$$۶)\ \lim_{x\to ۱} \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-۱}-۱}{\sqrt{x^۲-۱}} = \lim_{x\to ۱} \frac{\sqrt{x}-۱}{\sqrt{x^۲-۱}} + \frac{\sqrt{x-۱}}{\sqrt{x^۲-۱}}$$

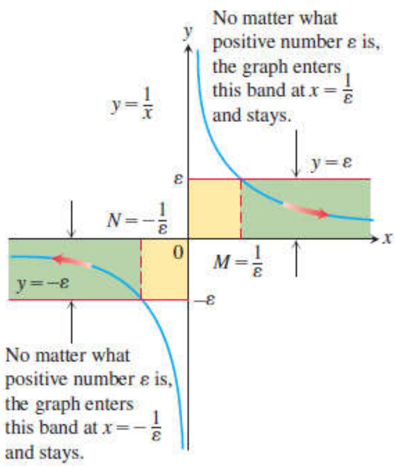
$$= \lim_{x\to ۱} \frac{\left(\sqrt{x}-۱\right)\left(\sqrt{x}+۱\right)}{\sqrt{x^۲-۱}\left(\sqrt{x}+۱\right)} + \frac{\sqrt{x-۱}}{\sqrt{x-۱}\sqrt{x+۱}}$$

$$= \lim_{x\to ۱} \frac{x-۱}{\sqrt{x^۲-۱}\left(\sqrt{x}+۱\right)} + \frac{۱}{\sqrt{x+۱}} = \lim_{x\to ۱} \frac{\sqrt{x-۱}}{\sqrt{x+۱}\left(\sqrt{x}+۱\right)} + \frac{۱}{\sqrt{۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

حد در بی نهایت:

گوییم تابع f در بی نهایت به L میل می کند اگر برای هر $\varepsilon > ۰$ ، مقدار $M > ۰$ چنان موجود باشد که برای هر $x > M$ داشته باشیم

$$\left|f(x)-L\right| < \varepsilon$$



در اینصورت می نویسیم:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

به طریق مشابه حد زیر تعریف می شود

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = L$$

مثال: نشان دهید $\lim_{x\to\infty} \frac{۱}{x} = ۰$.

فرض کنید $\varepsilon > ۰$ دلخواه و از این پس ثابت باشد، باید مقداری مانند $M > ۰$ چنان پیدا کنیم که برای هر $x > M$ داشته باشیم

$$\left|\frac{۱}{x}-۰\right| = \left|\frac{۱}{x}\right| < \varepsilon$$

برای برقراری رابطه فوق کافیست $M = \frac{۱}{\varepsilon}$ در نظر گرفته شود.

مثال: حدود زیر را محاسبه کنید.

$$۱)\lim_{x\to\infty}\frac{۲x^{۲}-x+۳}{۳x^{۲}+۵}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{۲}(۲-\frac{۱}{x}+\frac{۳}{x^{۲}})}{x^{۲}(۳+\frac{۵}{x^{۲}})}=\frac{۲}{۳}$$

$$۲)\lim_{x\to\infty}\frac{۵x+۲}{۲x^{۳}-۱}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{۳}(\frac{۵}{x^{۲}}+\frac{۲}{x^{۳}})}{x^{۳}(۲-\frac{۱}{x^{۳}})}=۰$$

$$۳)\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^{۲}+x}-x\right)\overset{\infty-\infty}{=}\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^{۲}+x}-x\right)\frac{\left(\sqrt{x^{۲}+x}+x\right)}{\left(\sqrt{x^{۲}+x}+x\right)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{۲}+x-x^{۲}}{\left(\sqrt{x^{۲}+x}+x\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x\left(\sqrt{۱+\frac{۱}{x}}+۱\right)}=\frac{۱}{۲}$$

$$۴)\lim_{x\to\infty}x\sin(\frac{۱}{x})\overset{\infty\times ۰}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{۱}{x}\right)}{\frac{۱}{x}}=\lim_{t\to ۰^{+}}\frac{\sin(t)}{t}=۱$$

$$۵)\lim_{x\to\infty}\frac{x\sqrt{x+۱}(۱-\sqrt{۲x+۳})}{۷-۶x+۴x^{۲}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\sqrt{x+۱}-x\sqrt{x+۱}\sqrt{۲x+۳})}{۷-۶x+۴x^{۲}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{\frac{۳}{۲}}\sqrt{۱+\frac{۱}{x}}-x^{۲}\sqrt{۱+\frac{۱}{x}}\sqrt{۲+\frac{۳}{x}})}{x^{۲}(۴-\frac{۶}{x}+\frac{۷}{x^{۲}})}=-\frac{\sqrt{۲}}{۴}$$

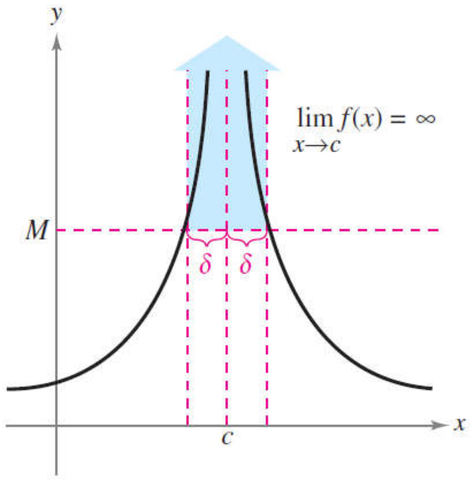
$$۶)\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^{۲}+۲x}-\sqrt{x^{۲}-۲x})\overset{\infty-\infty}{=}\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^{۲}+۲x}-\sqrt{x^{۲}-۲x})\frac{\sqrt{x^{۲}+۲x}+\sqrt{x^{۲}-۲x}}{\sqrt{x^{۲}+۲x}+\sqrt{x^{۲}-۲x}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^{۲}+۲x-x^{۲}+۲x}{\sqrt{x^{۲}(۱+\frac{۲}{x})}+\sqrt{x^{۲}(۱-\frac{۲}{x})}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۴x}{\underbrace{|x|}_{-x}\left(\sqrt{۱+\frac{۲}{x}}+\sqrt{۱-\frac{۲}{x}}\right)}=\frac{۴}{-۲}=-۲$$

تهیه و تنظیم: امیرحسین سبحانی

توجه کنید که $\sqrt{x^۲} = |x|$.

حد بی نهایت: گوییم تابع f وقتی x به سمت $x_۰$ میل می کند به بی نهایت میل می کند و می نویسیم



$$\lim_{x \to x_۰} f(x) = \infty$$

اگر برای هر عدد مثبت مانند M بتوانیم $\delta > ۰$ ای چنان بیابیم که

$$۰ < |x - x_۰| < \delta \Rightarrow f(x) > M$$

مثال: نشان دهید $\lim_{x \to ۰} \frac{۱}{x^۲} = \infty$.

باید نشان دهیم برای هر $M > ۰$ ، $\delta > ۰$ چنان موجود است که $۰ < |x - ۰| < \delta \Rightarrow \frac{۱}{x^۲} > M$. لذا کافیست $\delta = ۱ / \sqrt{M}$ چون

$$۰ < |x| < \delta \Rightarrow x^۲ < \delta^۲ = \frac{۱}{M} \Rightarrow \frac{۱}{x^۲} > M$$

پیوستگی:

تعریف: نقطه p در دامنه یک تابع، یک نقطه درونی از دامنه نامیده می شود اگر متعلق به همسایگی بازی در دامنه باشد. در غیر این صورت یک نقطه انتهایی نامیده می شود.

مثلا تابع $y = \sqrt{۴ - x^۲}$ را در نظر بگیرید. دامنه این تابع $[-۲, ۲]$ است. که بازه $(-۲, ۲)$ نقاط درونی و نقاط $\{-۲, ۲\}$ نقاط انتهایی دامنه این تابع هستند.

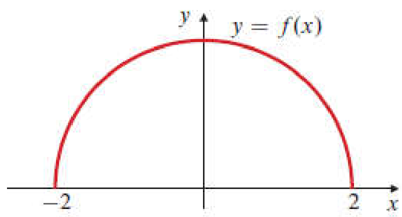


Figure 1.23 $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ is

پیوستگی در نقاط درونی: گوییم تابع f در نقطه درونی c پیوسته است اگر

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

بدیهی است که اگر $\lim_{x\to c} f(x)$ موجود نباشد و یا در صورت وجود با مقدار $f(c)$ برابر نباشد، تابع f را در c ناپیوسته گوییم.

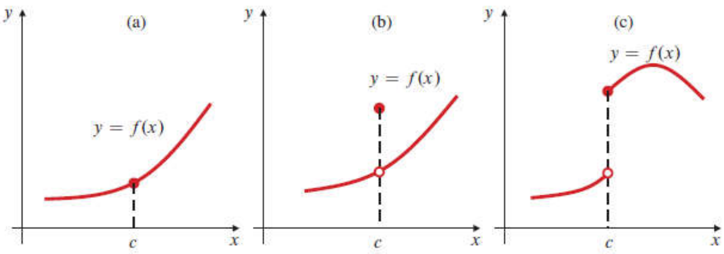


Figure 1.21
(a) f is continuous at c
(b) $\lim_{x\to c} f(x) \neq f(c)$
(c) $\lim_{x\to c} f(x)$ does not exist

پیوستگی راست و چپ: تابع f را در نقطه c از راست پیوسته گوییم هرگاه $\lim_{x\to c^+} f(x) = f(c)$ و تابع f را در نقطه c از چپ پیوسته گوییم اگر $\lim_{x\to c^-} f(x) = f(c)$.

پیوستگی در نقاط انتهایی: تابع f را در نقطه انتهایی چپ از دامنه پیوسته گوییم، هر گاه در این نقطه پیوسته از راست باشد. همچنین تابع f را در نقطه انتهایی راست از دامنه پیوسته گوییم، هر گاه در این نقطه پیوسته از چپ باشد.

پیوستگی روی بازه:

تابع f را روی بازه I پیوسته گوییم، اگر در هر نقطه از I پیوسته باشد. در حالت خاص یک تابع را پیوسته گوییم هر گاه روی هر نقطه از دامنه اش پیوسته باشد.

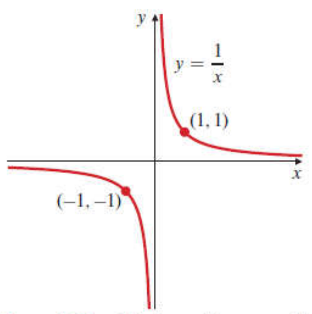


Figure 1.24 $1/x$ is continuous on its domain

تذکر توابع زیر روی دامنه خود پیوسته هستند:

چند جمله ای ها، توابع گویا، توابع $x^{\frac{m}{n}}$، توابع سینوس، کسینوس، تانژانت، کتانژانت، سکانت، کسکانت، توابع نمایی، تابع قدر مطلق.

قضیه: فرض کنید f و g هر دو در بازه ای شامل نقطه c تعریف شده باشد و هر دو در c پیوسته باشند. در اینصورت توابع زیر در c پیوسته هستند.

$$۱)\, f \pm g \qquad\qquad ۲)\, f\, g$$

$$۳)\, k\, f \qquad\qquad ۴)\, \frac{f}{g} \quad g(c) \neq ۰$$

$$۵)\, f(x)^{\frac{۱}{n}}$$ (در صورتیکه n زوج باشد مشروط بر اینکه $f(c) > ۰$)

قضیه (ترکیب توابع پیوسته):

اگر $f\big(g(x)\big)$ روی بازه ای شامل c تعریف شده باشد، و اگر f در L پیوسته بوده و $\lim\limits_{x\to c} g(x) = L$ در اینصورت:

$$\lim_{x\to c} f\big(g(x)\big) = f\big(L\big) = f\left(\lim_{x\to c} g(x)\right)$$

در حالت خاص اگر g در c پیوسته باشد یعنی $L = g(c)$، در اینصورت $\big(fog\big)(x) = f(g(x))$ در c پیوسته است و

$$\lim_{x\to c} f(g(x)) = f(g(c))$$

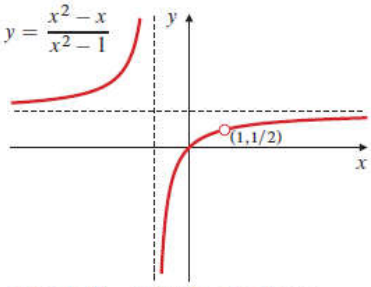


Figure 1.25 This function has a continuous extension to $x = 1$

تعریف: اگر تابع f در نقطه a تعریف نشده یا ناپیوسته باشد ولی بتوان تابع f را در این نقطه چنان تعریف کرد که تابع در آن پیوسته باشد، این ناپیوستگی را **رفع شدنی** گوییم.

مثال: تابع $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ در نقطه صفر ناپیوسته است ولی با تعریف آن برابر با یک تابعی پیوسته خواهد بود:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x}, & x \neq ۰ \\ ۱, & x = ۰ \end{cases}$$

قضیه (ماکسیمم- مینیمم[2]): اگر $f(x)$ تابعی پیوسته روی بازه بسته و کراندار $[a,b]$ باشد، در این صورت روی بازه مقدار ماکسیمم و مینیمم مطلق خود را می‌گیرد، به عبارتی دیگر مقادیر p و q در $[a,b]$ چنان موجودند که برای هر $x \in [a,b]$ داریم

$$f(p) \leq f(x) \leq f(q)$$

لذا f مقدار ماکسیمم مطلق خود $M = f(q)$ را در q و مقدار مینیمم مطلق خود $m = f(p)$ را در p می‌گیرد.

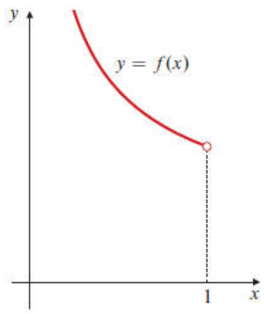


Figure 1.28 $f(x) = 1/x$ is continuous on the open interval $(0, 1)$. It is not bounded and has neither a maximum nor a minimum value

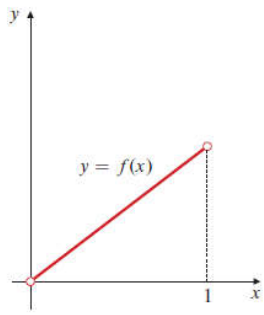


Figure 1.29 $f(x) = x$ is continuous on the open interval $(0, 1)$. It is bounded but has neither a maximum nor a minimum value

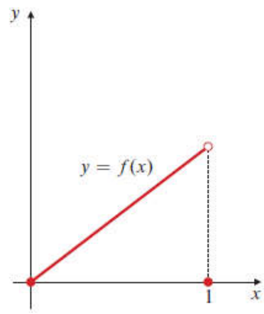


Figure 1.30 This function is defined on the closed interval $[0, 1]$ but is discontinuous at the endpoint $x = 1$. It has a minimum value but no maximum value

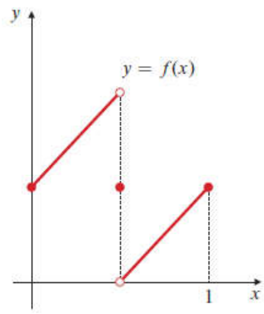


Figure 1.31 This function is discontinuous at an interior point of its domain, the closed interval $[0, 1]$. It is bounded but has neither maximum nor minimum values

قضیه مقدار میانی[3]: اگر $f(x)$ یک تابع پیوسته روی بازه $[a,b]$ و s مقداری بین $f(a)$ و $f(b)$ باشد، در این صورت مقداری چون $c \in [a,b]$ چنان موجود است که $s = f(c)$. در حالت خاص یک تابع پیوسته تعریف شده روی یک بازه بسته تمام مقادیر بین ماکسیمم و مینیمم مطلق خود را می‌گیرد.

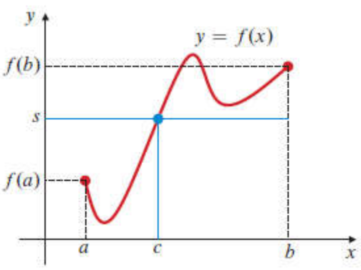


Figure 1.32 The continuous function f takes on the value s at some point c between a and b

نتیجه(قضیه بولتزانو[4]): اگر تابع f روی بازه بسته $[a,b]$ پیوسته باشد و $f(a)f(b) < ۰$ در اینصورت تابع f در این بازه حداقل یک ریشه دارد.

نتیجه بالا منتج به روش تصنیف در ریشه یابی می‌شود که در درس محاسبات عددی بحث خواهد شد.

[2] Max-min theorem
[3] Intermediate-value theorem
[4] Bolzano theorem

مثال: نشان دهید معادله $x^۳ - x - ۱ = ۰$ دارای حداقل یک ریشه در بازه $[۱, ۲]$ است.

$$f(۱) = -۱, f(۲) = ۵, f(۱)f(۲) < ۰$$

لذا تابع $x^۳ - x - ۱$ در این بازه حداقل دارای یک ریشه خواهد بود.