

تعریف مشتق: تابع f ، تابع دیرری است که با $f'(x)$ خاصیت داشته و در تمام نقاطی که حد زیرموجود است بصورت $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ تعریف می شود.

اگر $f'(x)$ موجود باشد، تابع f ، در x مشتق پذیر گوئیم.

توجه: مقدار مشتق تابع f در نقطه خاصی مانند x_0 می تواند به صورت کلی از حد در زیر خاصین داده شود:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

تذکره: مشابه تعریف صرات و حد چپ، می توان مشتق راست و مشتق چپ را تعریف کرد:

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

تعریف: تابع f را برای بازه $[a, b]$ مشتق پذیر گوئیم هرگاه $f'(x) = 0$ برای $x \in (a, b)$ و $f'_+(a)$ و $f'_-(b)$ موجود باشند.

مثال: مشتق $f(x) = x^3 - x$ را بیابید.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(x+h)^3 - (x+h)] - [x^3 - x]}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x - h - x^3 + x}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3 - h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 3x^2 + 3xh + h^2 - 1 = 3x^2 - 1$$

مثال: مشتق $f(x) = \sqrt{x}$ را بیابید.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \times \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \right)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

خادداری: برای تابع مشتق تابع $f(x) = y$ می توان از فرمول های زیر استفاده کرد.

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dP}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) = D f(x) = D_x f(x)$$

فرمول های D و $\frac{d}{dx}$ برای مشتق گیری نامیده می شوند. به یاد $\frac{dy}{dx}$ که توسط (دیفرنسیال) معرفی شده است نباید با تقسیم اشتباه گرفته شود. همچنین برای محاسبه مشتق $\frac{dy}{dx}$ در یک نقطه مانند a از فرمول زیر استفاده می کنیم

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=a} = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=a}$$

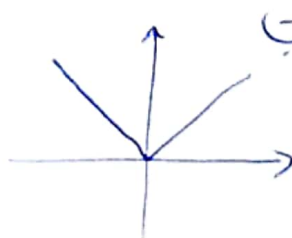
مثال: مشتق تابع $f(x) = |x|$ را محاسبه کنید.

$$x > 0: \quad f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|x+h| - |x|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h) - x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1$$

$$x < 0: \quad f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|x+h| - |x|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(x+h) - (-x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{h} = -1$$

$$f'_+(0) = 1, \quad f'_-(0) = -1$$

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$



لذا در صورت مشتق نیز سب

قضیه: اگر f ، a مشتق پذیر باشد، در a پیوسته است.

قواعد مشتق گیری:

$$1) f(x) = c$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx}(c) = 0$$

$$2) \frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1} \quad \Leftarrow f(x) = x^n \quad \text{اگر}$$

$$x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \dots + xa^{n-2} + a^{n-1})$$

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} (x^{n-1} + x^{n-2}a + \dots + xa^{n-2} + a^{n-1})$$

$$= a^{n-1} + a^{n-1} + \dots + a^{n-1} = na^{n-1}$$

در حالت کلی اگر r یک عدد حقیقی باشد $\frac{d}{dx}(x^r) = r x^{r-1}$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{d}{dx}(x^{-2}) = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$$

$$\frac{d}{dx}(\sqrt[3]{x}) = \frac{d}{dx}(x^{\frac{1}{3}}) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$$

قضیه: اگر f و g در x مشتق پذیر باشند و c یک عدد ثابت باشد، در این صورت توابع

$$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x) \quad \text{در } x \text{ مشتق پذیر بوده داریم}$$

$$(cf)'(x) = c f'(x)$$

$$f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x + 2$$

$$f'(x) = 6x^2 - 10x + 4$$

$$f(x) = \sqrt{x} + \frac{3}{x} - 18 \quad \text{مثال ۱}$$

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}} + 3x^{-1} - 18$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 3x^{-2}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{x^2}$$

قانون مشتق ضرب: اگر f و g توابعی مشتق پذیر در x باشند، در این صورت f, g در x

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$$

مشتق پذیر است

مثال ۲

$$1) \frac{d}{dx} ((x^2 + 1)(x^3 + 4)) = 2x(x^3 + 4) + (x^2 + 1)(3x^2)$$

$$= 5x^4 + 3x^2 + 8x$$

$$2) \frac{d}{dx} \left((2\sqrt{x} + \frac{3}{x})(3\sqrt{x} - \frac{2}{x}) \right)$$

$$= \frac{d}{dx} ((2x^{\frac{1}{2}} + 3x^{-1})(3x^{\frac{1}{2}} - 2x^{-1}))$$

$$= (x^{-\frac{1}{2}} - 3x^{-2})(3x^{\frac{1}{2}} - 2x^{-1}) + (2x^{\frac{1}{2}} + 3x^{-1})(\frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}} + 2x^{-2})$$

$$= 6 - \frac{5}{2x^{\frac{3}{2}}} + \frac{12}{x^3}$$

$$(uv)' = u'v + v'u$$

قانون مشتق تفریق: اگر f و g در x مشتق پذیر باشند و $g(x) \neq 0$ در این صورت $\frac{f}{g}$ در x مشتق پذیر بوده و

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$1) y = \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1+x^2)(-2x) - (1-x^2)(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{-4x}{(1+x^2)^2}$$

$$2) \frac{\sqrt{t}}{3-5t}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\sqrt{t}}{3-5t} \right) = \frac{(3-5t) \frac{1}{2\sqrt{t}} - \sqrt{t}(-5)}{(3-5t)^2} = \frac{3+5t}{2\sqrt{t}(3-5t)^2}$$

مشتق توابع نمایی: تابع $f(x) = b^x$ را در نظر بگیرید،

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{b^{x+h} - b^x}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{b^x b^h - b^x}{h} = b^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{b^h - 1}{h}$$

توجه کنید لذا $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{b^h - 1}{h}$

$$f'(x) = f'(0) b^x$$

بنابراین با توجه به تعریف تابع e^x

$$\left. \frac{d}{dx} (e^x) \right|_{x=0} = 1$$

لذا $\frac{d}{dx} (e^x) = e^x$

همین می توان نشان داد که در حالت کلی

لذا $\frac{d}{dx} (b^x) = b^x \ln(b)$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{b^h - 1}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{\ln(b^h)} - 1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{h \ln(b)} - 1}{h} \stackrel{H}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \ln(b) e^{h \ln(b)} = \ln(b) \end{aligned}$$

(5)

$$1) f(x) = e^x - x^2$$

$$f'(x) = e^x - 2x$$

مثال:

$$2) f(x) = x e^x$$

$$f'(x) = x e^x + e^x = (x+1)e^x$$

$$3) f(x) = \frac{e^x}{1+x^2}$$

$$f'(x) = \frac{(1+x^2)e^x - (2x)e^x}{(1+x^2)^2} = \frac{e^x(1-x)^2}{(1+x^2)^2}$$

قضیه (مشتق تابع مرکب): اگر $f(u)$ در $u = g(x)$ و $g(x)$ در x مشتق پذیر باشد در

اصفورت تابع مرکب $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ در x مشتق پذیر بوده و

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) g'(x)$$

بعبارت دیگر

$$(f(u))' = u' f'(u)$$

تذکره: (غایب لا بینیتی مشتق تابع مرکب)

اگر $g = f(u)$ و $u = u(x)$ در اصفورت:

$$\frac{dg}{dx} = \frac{dg}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

مثال:

$$1) y = \sqrt{x^2 + 1}$$

$$u = x^2 + 1 \Rightarrow y = \sqrt{u}$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot (2x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$2) y = (x^2 + 3x - 1)^{15}$$

$$u = x^2 + 3x - 1$$

$$\Rightarrow y' = 15(x^2 + 3x - 1)^{14} (2x + 3) = 15(2x + 3)(x^2 + 3x - 1)^{14}$$

$$3) y = (e^x + 2x - 1)^{\frac{3}{4}}$$

$$u = e^x + 2x - 1$$

مثال :

$$y' = \frac{3}{4} (e^x + 2x - 1)^{-\frac{1}{4}} (e^x + 2)$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{d}{dx} (u^r) = r u^{r-1} \frac{du}{dx} \\ (u^r)' = r u' u^{r-1} \end{array} \right]$$

$$4) y = e^{(x^2 + 2x - 1)}$$

$$y' = (2x + 2) e^{(x^2 + 2x - 1)}$$

مشق تواج سطانی :

$$1) y = \sin(x)$$

$$\frac{d}{dx} (\sin(x)) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x) \cos(h) + \cos(x) \sin(h) - \sin(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x) (\cos(h) - 1) + \cos(x) \sin(h)}{h}$$

$$= \sin(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} + \cos(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h}$$

$$= \sin(x) \cdot 0 + \cos(x) = \cos(x)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2(\frac{h}{2})}{h}$$

$$\theta = \frac{h}{2}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin(\theta)}{(\theta)} \sin \theta = 0$$

$$2) y = \cos(x)$$

$$\frac{d}{dx} (\cos(x)) = -\sin(x)$$

$$3) y = \tan(x)$$

$$\frac{d}{dx} (\tan(x)) = \frac{d}{dx} \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)} \right) = \frac{\cos(x)\cos(x) + \sin(x)\sin(x)}{\cos^2(x)}$$

$$= \frac{1}{\cos^2(x)} = \sec^2(x)$$

يعبر فلاس د، م

$$\frac{d}{dx} (\sin(x)) = \cos(x)$$

$$\frac{d}{dx} (\cos(x)) = -\sin(x)$$

$$\frac{d}{dx} (\tan(x)) = \sec^2(x)$$

$$\frac{d}{dx} (\cot(x)) = -\csc^2(x)$$

$$\frac{d}{dx} (\sec(x)) = \sec(x) \tan(x)$$

$$\frac{d}{dx} (\csc(x)) = -\csc(x) \cot(x)$$

$$\frac{d}{dx} (\sec(x)) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\cos(x)} \right) = \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)} = \sec(x) \tan(x)$$

$f(u)$	$\frac{d}{du} f(u)$
c	0
u^n	$nu'u^{n-1}$
e^u	$u'e^u$
a^u	$u'a^u \ln(a)$
$\sin(u)$	$u' \cos(u)$
$\cos(u)$	$-u' \sin(u)$
$\tan(u)$	$u' \sec^2(u)$
$\cot(u)$	$-u' \csc^2(u)$
$\sec(u)$	$u' \sec(u) \tan(u)$
$\csc(u)$	$-u' \csc(u) \cot(u)$

مثال: مطلوب است گانسه مشتقات زیر:

$$\textcircled{1} y = e^{\overbrace{\sec(\theta)}^u} \Rightarrow y' = \sec \theta \operatorname{tg} \theta e^{\sec(\theta)}$$

$$\textcircled{2} y = e^{2x} \cos(x) \Rightarrow y' = 2e^{2x} \cos(x) - e^{2x} \sin(x)$$

$$\textcircled{3} y = \operatorname{tg}(\cos(x^2+1)) \Rightarrow y' = -2x \sin(x^2+1) \sec^2(\cos(x^2+1))$$

$$\textcircled{4} y = 3^{\cos(x)} \Rightarrow y' = -\sin(x) 3^{\cos(x)} \ln(3)$$

$$\textcircled{5} F(t) = e^{t \sin(2t)} \Rightarrow F'(t) = (\sin(2t) + 2t \cos(2t)) e^{t \sin(2t)}$$

$$\textcircled{6} y = \cot^2(\sin(\theta)) \Rightarrow y' = -2 \cos(\theta) \csc^2(\sin(\theta)) \cot(\sin(\theta))$$

$$u = \cot(\sin(\theta)) \Rightarrow y = u^2 \Rightarrow y' = 2u'u$$

$$u' = -\cos \theta \csc^2 \sin(\theta)$$

$$\textcircled{7} y = e^{\sin(2x)} + \sin(e^{2x})$$

$$y' = 2 \cos(2x) e^{\sin(2x)} + 2e^{2x} \cos(e^{2x})$$

$$\textcircled{8} y = \operatorname{tg}(\underbrace{\sec(\cos(t))}_u) \Rightarrow y' = -\sin(t) \sec(\cos(t)) \operatorname{tg}(\cos(t)) \sec^2(\sec(\cos(t)))$$

$$u = \sec(\underbrace{\cos(t)}_v) \Rightarrow u' = v' \sec(v) \operatorname{tg}(v)$$

$$\Rightarrow u' = -\sin(t) \sec(\cos(t)) \operatorname{tg}(\cos(t))$$

تمرین: مشتق زیر را پیدا کنید

$$y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$$

مشتقات مرتب بالاتر:

اگر مشتق تابع $y = f(x)$ ، $y' = f'(x)$ خود در x مشتق پذیر باشد، می توان مشتق آن را محاسبه کرد و مشتق دوم تابع f نامیده که با $y'' = f''(x)$ نمایش داده می شود.

نمادهای مشتق دوم:

$$y'' = f''(x) = \frac{d^2 y}{dx^2} = D_x^2 y = \frac{d^2}{dx^2} f(x)$$

مسابه بحث قبل می توان مشتقات مرتب بالاتر را نیز تعریف نمود.

اگر $y^{(n-1)} = f^{(n-1)}(x)$ مشتق $(n-1)$ ام تابع $y = f(x)$ باشد و این تابع خود در x مشتق پذیر باشد در این صورت مشتق n ام تابع $f(x)$ بصورت زیر تعریف می شود:

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d}{dx} (f^{(n-1)}(x))$$

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d^n}{dx^n} f(x) = D_x^n y$$

مثال: مشتقات زیر را محاسبه کنید

① $y = x^n$

$$y' = nx^{n-1}, \quad y'' = n(n-1)x^{n-2}, \quad \dots, \quad y^{(k)} = n(n-1)\dots(n-k+1)x^{n-k}$$

$$y^{(n)} = n(n-1)\dots \times 2 \times 1 = n!$$

$$y^{(n+1)} = y^{(n+2)} = \dots = 0$$

② $y = \sin(x), \quad y' = \cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$

$$y'' = -\sin(x) = \sin(x + \pi) = \sin(x + 2\frac{\pi}{2})$$

$$y^{(3)} = -\cos(x) = \sin(x + 3\frac{\pi}{2})$$

⋮

$$y^{(n)}(x) = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$$

$$(3) \quad y = \sin(x^2)$$

مشتق دوم را بر حسب اصل بنویسید.

$$y' = 2x \cos(x^2) \Rightarrow y'' = 2 \cos(x^2) - 4x^2 \sin(x^2)$$

$$(4) \quad y = \frac{1}{1+x} \quad y = (1+x)^{-1}$$

مشتق nام تابع زیر را حساب کنید.

$$y' = -(1+x)^{-2}$$

$$y'' = -(-2)(1+x)^{-3} = 2(1+x)^{-3}$$

$$y^{(3)} = 2(-3)(1+x)^{-4} = -3! (1+x)^{-4}$$

⋮

$$y^{(n)} = (-1)^n n! (1+x)^{-(n+1)}$$

قضیه (قاعده لایبِنِیز) :

فرض کنید u و v توابعی با مشتقات متوالی تا مرتبه n ام باشند، در این صورت مشتق n ام تابع uv به کمک رابطه زیر قابل محاسبه است.

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^{(n-k)} v^{(k)}$$

قضیه بالا را می توان به استقرا ثابت کرد.

مثال : مشتق 10 ام تابع $f(x) = x^4 \sin(x)$ را محاسبه کنید

$$(x^4 \sin(x))^{(10)} = \binom{10}{0} (\sin(x))^{(10)} x^4 + \binom{10}{1} (\sin(x))^{(9)} (x^4)'$$

$$+ \binom{10}{2} (\sin(x))^{(8)} (x^4)'' + \binom{10}{3} (\sin(x))^{(7)} (x^4)^{(3)} + \binom{10}{4} (\sin(x))^{(6)} (x^4)^{(4)}$$

$$+ \dots + \binom{10}{10} \sin(x) (x^4)^{(10)}$$

$$= -x^4 \sin(x) + 40 x^3 \cos(x) + 540 x^2 \sin(x)$$

$$- 2880 x \cos(x) + 5040 \sin(x)$$

مشتق توابع ضمنی : برای محاسبه شیب نمودار $y = f(x)$ به سادگی می توان از این تابع در صورت

وجود، مشتق گیری کرد ولی در حالت کلی یک نمودار در فضای R^2 به یک معادله $F(x, y) = 0$

مشخص می شود که ممکن است نامشخص دهنده یک یا چند تابع باشد. برای روشن شدن موضوع

معادلات زیر را در نظر بگیرید

$$x^3 + y^3 - 9xy = 0$$

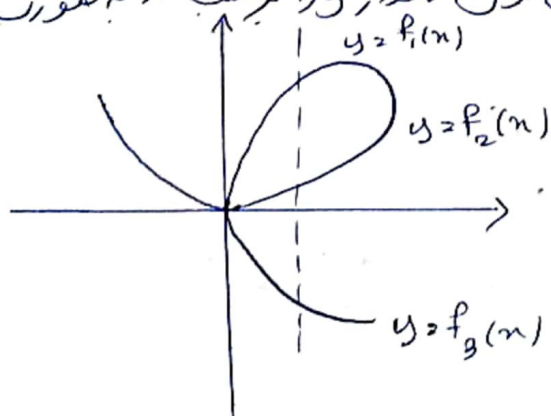
$$y^2 - x = 0$$

$$x^2 + y^2 - 25 = 0$$

این معادلات رابطه بین متغیرهای x و y را بصورت ضمنی بیان می کنند، به این صورت که یک مقدار

x یک یا چند مقدار y را تعیین می کند. گاهی می توان مقدار y را بر حسب x به صورت یک یا چند

تابع صریح از x بدست آورد.



فولوی

$$x^3 + y^3 - 9xy = 0$$

برای محاسبه مشتق ضمنی به ترتیب زیر عمل می‌کنیم :

(1) از طرفین معادله بر حسب x مشتق می‌گیریم و با y به صورت تابعی از x برخورد کرده و در صورت لزوم از قاعده زنجیره‌ای استفاده می‌کنیم.

(2) همه عبارات شامل $\frac{dy}{dx}$ را در قسمت چپ معادله و عبارات دایره‌دار درست راست قرار می‌دهیم، در نهایت با فاکتورگیری از $\frac{dy}{dx}$ درست چپ، مقدار $\frac{dy}{dx}$ را بدست می‌آوریم.

مثال 1: مشتق تابع ضمنی $x^2 + y^2 - 5y - 4 = -4$ را محاسبه کنید.

$$3y^2 \frac{dy}{dx} + 2y \frac{dy}{dx} - 5 \frac{dy}{dx} - 2x = 0$$

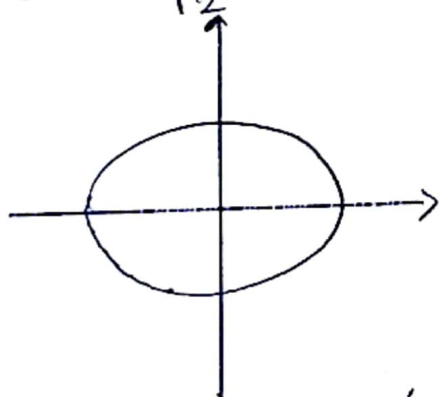
$$(3y^2 + 2y - 5) \frac{dy}{dx} = 2x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{3y^2 + 2y - 5}$$

مثال 2: شیب خط مماس بر نمودار $x^2 + 4y^2 = 4$ را در نقطه $(\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ بدست آورید.

$$x^2 + 4y^2 = 4$$

$$2x + 8y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$8y \frac{dy}{dx} = -2x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{4y}$$



$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{(\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}})} = \frac{-\sqrt{2}}{-4/\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

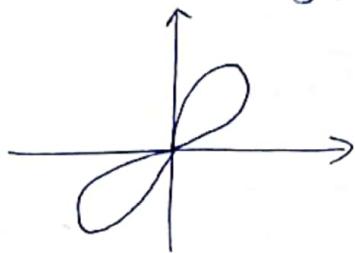
مثال 3: شیب خط مماس بر نمودار $3(x^2 + y^2)^2 = 100xy$ را در نقطه $(3, 1)$ بدست آورید.

$$\frac{d}{dx} [3(x^2 + y^2)^2] = \frac{d}{dx} [100xy]$$

$$3(2)(x^2 + y^2)(2x + 2y \frac{dy}{dx}) = 100 [x \frac{dy}{dx} + y]$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{100y - 12x(x^2 + y^2)}{12y(x^2 + y^2) - 100x} = \frac{25 - 3x(x^2 + y^2)}{3(x^2 + y^2) - 25x}$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{(3,1)} = \frac{13}{9}$$



نمونه‌ها

مثال 4: با فرض اینکه $y^2 = x^2 + \sin(xy)$ ، $\frac{dy}{dx}$ را بیابید.

$$2y \frac{dy}{dx} = 2x + (y + x \frac{dy}{dx}) \cos(xy)$$

$$(2y - x \cos(xy)) \frac{dy}{dx} = 2x + y \cos(xy)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + y \cos(xy)}{2y - x \cos(xy)}$$

نکته: اگر $F(xy) = 0$ داده شده باشد، برای محاسبه $\frac{dy}{dx}$ می‌توان از فرمول زیر کمک گرفت:

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{F_x}{F_y}$$

که در اینجا F_x مشتق جزئی F نسبت به x و F_y مشتق جزئی F نسبت به y است. به این ترتیب که برای محاسبه F_x از F نسبت به x مشتق می‌گیریم و فرض می‌کنیم y یک عدد ثابت است. و برای محاسبه F_y نیز از F نسبت به y مشتق می‌گیریم و فرض می‌کنیم x ثابت است.

مثال 5: مقدار $\frac{dy}{dx}$ را در مثالهای قبل بیاب آورید.

$$y^2 = x^2 + \sin(xy)$$

$$\underbrace{y^2 - x^2 - \sin(xy)}_F = 0$$

$$F_x = -2x - y \cos(xy)$$

$$F_y = 2y - x \cos(xy)$$

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{-2x - y \cos(xy)}{2y - x \cos(xy)} = \frac{2x + y \cos(xy)}{2y - x \cos(xy)}$$

$$x^2 + 4y^2 = 4 \Rightarrow \underbrace{x^2 + 4y^2 - 4}_F = 0$$

$$F_x = 2x, \quad F_y = 8y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{2x}{8y} = -\frac{x}{4y}$$

$$3(x^2 + y^2)^2 = 100xy \quad \underbrace{3(x^2 + y^2)^2 - 100xy}_F = 0$$

$$F_x = 6(x^2 + y^2)(2x) - 100y$$

$$F_y = 6(x^2 + y^2)(2y) - 100x$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{12x(x^2 + y^2) - 100y}{12y(x^2 + y^2) - 100x}$$

محاسبه مشتقات مراتب بالاتر توابع ضمنی :

مثال : اگر $xy + y^2 = 2x$ ، $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$ را بیابید

حل : ابتدا از طرفین معادله دو بار نسبت به x مشتق می گیریم

$$xy' + y + 2yy' = 2$$

$$xy'' + y' + y' + 2yy'' + 2y'y' = 0$$

$$\begin{cases} (x+2y)y' = 2-y \Rightarrow y' = \frac{2-y}{x+2y} \\ (x+2y)y'' = -(2y' + 2y'^2) \Rightarrow y'' = -\frac{2y' + 2y'^2}{x+2y} \end{cases}$$

$$\Rightarrow y'' = -2y' \frac{1+y'}{x+2y} = -2 \frac{2-y}{x+2y} \frac{1+\frac{2-y}{x+2y}}{x+2y} \stackrel{\text{همان قدر معادله}}{=} -\frac{8}{(x+2y)^3}$$

امیرحسین سجانی ۹۹/۱/۱۶

مثال: اگر $x^2 + y^2 = 25$ ، $\frac{d^2 y}{dx^2}$ را بیابید.

$$2x + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

$$2 + 2y'^2 + 2yy'' = 0 \Rightarrow 2yy'' = -(2 + 2y'^2)$$

$$\Rightarrow y'' = -\frac{(2 + 2y'^2)}{2y} = -\frac{(2 + 2\frac{x^2}{y^2})}{2y} = -\frac{\frac{y^2 + x^2}{y^2}}{y} = -\frac{25}{y^3}$$

مثال: معادله خط مماس بر نمودار $x^2(x^2 + y^2) = y^2$ در نقطه $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ را بیابید.

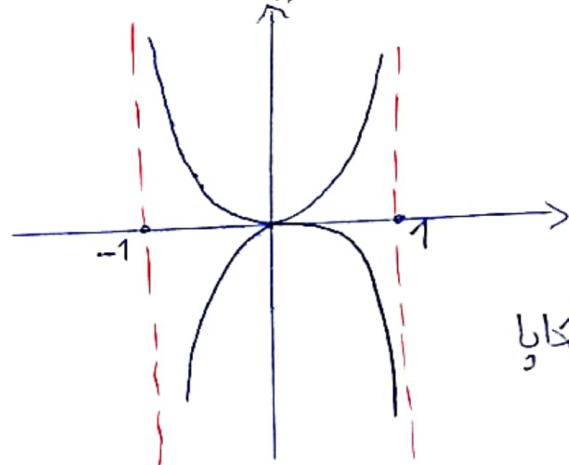
$$x^4 + x^2y^2 - y^2 = 0$$

$$4x^3 + 2xy^2 + 2yx^2 \frac{dy}{dx} - 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$(2yx^2 - 2y) \frac{dy}{dx} = -(4x^3 + 2xy^2)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-4x^3 + 2xy^2}{2yx^2 - 2y}$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = 3$$



منحنی کایا

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - \frac{\sqrt{2}}{2} = 3(x - \frac{\sqrt{2}}{2}) \Rightarrow y = 3x - \sqrt{2}$$

محاسبه مشتق توابع معکوس به یک مشتق منتهی:

مثال: اگر $y = \sin^{-1}(x)$ ، y' را حساب کنید.

$$y = \sin^{-1}(x) \Rightarrow \sin(y) = x \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$

$$y' \cos(y) = 1 \Rightarrow y' = \frac{1}{\cos(y)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(y)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

مثال: $y = \tan^{-1}(x)$

$$y = \tan^{-1}(x) \Rightarrow x = \tan(y) \Rightarrow 1 = \sec^2(y) y'$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{\sec^2(y)} = \frac{1}{1 + \tan^2(y)} = \frac{1}{1 + \tan^2(\tan^{-1}(x))} = \frac{1}{1 + x^2}$$

مثال: $y = \sec^{-1}(x) \Rightarrow$

$$y = \sec^{-1}(x) \Rightarrow x = \sec(y) \Rightarrow 1 = \sec(y) \tan(y) y'$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{\sec(y) \tan(y)} \Rightarrow y' = \frac{1}{x \tan(y)} = \frac{1}{x \sqrt{x^2 - 1}}$$

$$1 + \tan^2(y) = \sec^2(y) \Rightarrow \sec^2(y) - 1 = \tan^2(y) \Rightarrow \tan(y) = \sqrt{\sec^2(y) - 1}$$

$$0 \leq y < \frac{\pi}{2} \quad \text{یا} \quad \pi \leq y < \frac{3\pi}{2}$$

به طور خلاصه فرمول های زیر را برای مشتق توابع معکوس مثلثاتی داریم:

$$\frac{d}{dx} (\sin^{-1}(u)) = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$\frac{d}{dx} (\csc^{-1}(u)) = -\frac{u'}{u \sqrt{u^2 - 1}}$$

$$\frac{d}{dx} (\cos^{-1}(u)) = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$\frac{d}{dx} (\sec^{-1}(u)) = \frac{u'}{u \sqrt{u^2 - 1}}$$

$$\frac{d}{dx} (\tan^{-1}(u)) = \frac{u'}{1+u^2}$$

$$\frac{d}{dx} (\cot^{-1}(u)) = -\frac{u'}{1+u^2}$$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

نکته:

$$y = f^{-1}(x) \Rightarrow x = f(y) \Rightarrow 1 = y' f'(y)$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

مثال: مطلوب مشتق تابع $y = \ln(x)$

$$y' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

$$y = \ln(x) \Rightarrow x = e^y$$

$$= \frac{1}{e^{\ln(x)}} = \frac{1}{x}$$

به همین ترتیب برای $y = \log_b x$ داریم:

$$y = \log_b x \Rightarrow x = b^y \Rightarrow 1 = y' b^y \ln(b)$$

$$y' = \frac{1}{b^y \ln(b)} = \frac{1}{x \ln(b)}$$

$$\star \frac{d}{dx} (\ln(u)) = \frac{u'}{u}$$

$$\star \frac{d}{dx} (\log_b u) = \frac{u'}{u \ln(b)}$$

مثال: مشتق توابع زیر را حساب کنید.

$$\textcircled{1} y = \ln(\sin(x))$$

$$y' = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \cot(x)$$

$$\textcircled{2} y = \sqrt{\ln(x)} = \ln(x)^{\frac{1}{2}}$$

$$y' = \frac{1}{2} (\ln(x))^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow y' = \frac{1}{2x\sqrt{\ln(x)}}$$

$$\textcircled{3} y = \log_2(2 + \sin(x))$$

$$y' = \frac{\cos(x)}{(2 + \sin(x)) \ln(2)}$$

$$\textcircled{4} y = \ln|x|$$

$$y = \begin{cases} \ln(x) & x > 0 \\ \ln(-x) & x < 0 \end{cases}$$

$$y' = \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 0 \\ -\frac{1}{x} & x < 0 \end{cases} \Rightarrow y' = \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 0 \\ \frac{1}{x} & x < 0 \end{cases}$$

$$y' = \frac{1}{x}$$

$$\textcircled{5} y = \ln(e^{-x} + xe^{-x})$$

$$y' = \frac{-e^{-x} - xe^{-x} + e^{-x}}{e^{-x} + xe^{-x}} = \frac{-xe^{-x}}{e^{-x}(1+x)} = -\frac{x}{1+x}$$

مشتق گیری لگاریتمی :

محاسبه مشتق توابع پیچیده شامل ضرب، تقسیم و توان با لگاریتم لگاریتم ساده‌تری شود.
این روش را مشتق گیری لگاریتمی می‌نامند.

مثال : مشتق توابع زیر را محاسبه کنید.

$$\star \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b) \star$$

$$\star \ln(a^b) = b \ln(a) \star$$

$$\textcircled{1} \quad y = \frac{x^{\frac{3}{4}} \sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}$$

$$\ln(y) = \frac{3}{4} \ln(x)^{\frac{3}{4}} + \ln(\sqrt{x^2+1}) - \ln(3x+2)^5$$

$$\ln(y) = \frac{3}{4} \ln(x) + \frac{1}{2} \ln(x^2+1) - 5 \ln(3x+2)$$

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{3}{4} \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \frac{2x}{x^2+1} - 5 \frac{3}{3x+2}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = y \left(\frac{3}{4x} + \frac{x}{x^2+1} - \frac{15}{3x+2} \right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^{\frac{3}{4}} \sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5} \left(\frac{3}{4x} + \frac{x}{x^2+1} - \frac{15}{3x+2} \right)$$

$$\textcircled{2} \quad y = x^{\sqrt{x}} \quad (\text{صم})$$

$$\ln(y) = \ln(x^{\sqrt{x}}) \Rightarrow \ln(y) = \ln(x^{\sqrt{x}})$$

$$\ln(y) = \sqrt{x} \ln(x) \Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln(x) + \frac{\sqrt{x}}{x}$$

$$y' = y \left(\frac{\ln(x)}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) = x^{\sqrt{x}} \left(\frac{\ln(x)}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) = x^{\sqrt{x}} \left(\frac{2 + \ln(x)}{2\sqrt{x}} \right)$$

$$\textcircled{3} \quad x^y = y^x \Rightarrow \underbrace{x^y - y^x}_f = 0 \Rightarrow y \ln(x) = x \ln(y) \Rightarrow y' \ln(x) + \frac{y}{x} = \ln(y) + x \frac{y'}{y}$$

$$(\ln(x) - \frac{x}{y}) y' = \ln(y) - \frac{y}{x} \Rightarrow y' = \frac{\ln(y) - \frac{y}{x}}{\ln(x) - \frac{x}{y}}$$

$$\textcircled{4} \quad y = x^{\sin(x)} \Rightarrow \ln(y) = \sin(x) \ln(x)$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{\sin(x)}{x} + \cos(x) \ln(x)$$

$$\Rightarrow y' = y \left(\frac{\sin(x)}{x} + \cos(x) \ln(x) \right) = x^{\sin(x)} \left(\frac{\sin(x)}{x} + \cos(x) \ln(x) \right)$$

$$\textcircled{5} \quad y = (x^2+2)^2 (x^4+4)^4$$

$$\ln(y) = \ln(x^2+2)^2 + \ln(x^4+4)^4$$

$$\Rightarrow \ln(y) = 2 \ln(x^2+2) + 4 \ln(x^4+4)$$

$$\frac{y'}{y} = 2 \frac{2x}{x^2+2} + 4 \frac{4x^3}{x^4+4} \Rightarrow y' = y \left(\frac{4x}{x^2+2} + \frac{16x^3}{x^4+4} \right)$$

$$\Rightarrow y' = (x^2+2)^2 (x^4+4)^4 \left(\frac{4x}{x^2+2} + \frac{16x^3}{x^4+4} \right)$$

مشتق توابع پارامتری :

اگر خم C به کمک معادلات $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ مشخص شود، همین $x(t)$ و $y(t)$ هر دو

مشتق پذیر باشند و $x'(t) \neq 0$ باشد داریم:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \quad \textcircled{1}$$

مثال: اگر $\begin{cases} x = \sin(t) \\ y = \cos(t) \end{cases}$ را بایست.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\sin(t)}{\cos(t)} = -\tan(t)$$

تذکره: برای یافتن مشتقات مراتب بالا تر می توان فرمول بالا را تکرار کرد

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left[\frac{dy}{dx} \right] = \frac{\frac{d}{dt} \left[\frac{dy}{dx} \right]}{\frac{dx}{dt}}$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{d}{dx} \left[\frac{d^2 y}{dx^2} \right] = \frac{\frac{d}{dt} \left[\frac{d^2 y}{dx^2} \right]}{\frac{dx}{dt}}$$

مثال: اگر $\begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = \frac{1}{4}(t^2 - 4) \end{cases}$ معادله $\frac{dy}{dx}$ و $\frac{d^2y}{dx^2}$ را در نقطه $(2, 3)$ حساب کنید

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{\frac{1}{2}t}{\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}}} = t^{\frac{3}{2}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt} \left[\frac{dy}{dx} \right]}{\frac{d}{dt} x} = \frac{\frac{d}{dt} \left[t^{\frac{3}{2}} \right]}{\frac{1}{2}\sqrt{t}} = \frac{\frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}t^{\frac{1}{2}}} = 3t$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{(2,3)} = t^{\frac{3}{2}} \Big|_{t=4} = 4^{\frac{3}{2}} = 8 \quad x=2 \Rightarrow t=4$$

$$\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{(2,3)} = 3t \Big|_{t=4} = 12$$

تذکره: $y'' = \frac{x'y'' - x''y'}{(x')^3}$

① $\begin{cases} x = a(t - \sin(t)) \\ y = a(1 - \cos(t)) \end{cases}$

مثال: مشتق توابع پارامتری زیر را بیابید.

$$x' = a(1 - \cos(t)) \quad , \quad y' = a \sin(t) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{a \sin(t)}{a(1 - \cos(t))}$$

$$= \frac{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right) \cos\left(\frac{t}{2}\right)}{2 \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} = \cot\left(\frac{t}{2}\right) \quad t \neq 2k\pi$$

② $\begin{cases} x = 2 \ln(\cot(t)) & x' = -2 \frac{\csc^2(t)}{\cot(t)} \\ y = \tan(t) + \cot(t) & y' = \sec^2(t) - \csc^2(t) \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\sec^2(t) - \csc^2(t)}{\frac{\csc^2(t)}{\cot(t)}} = \frac{\cot(t)(\sec^2(t) - \csc^2(t))}{\csc^2(t)}$$

$$= \cot\left(\frac{\sec^2(t)}{\csc^2(t)}\right) - \cot(t) = \cot\left(\frac{1}{\frac{\cos^2(t)}{1}}\right) - \cot(t)$$

$$= \cot(t) + \tan^2(t) - \cot(t) = \tan^2(t) - \cot(t)$$

$$\textcircled{1} \begin{cases} x = a \cos^3(t) \\ y = b \sin^3(t) \end{cases}$$

مثال: مشتق دوم توابع پارامتری زیر را بیابید.

$$\textcircled{2} \begin{cases} x = e^t \cos(t) \\ y = e^t \sin(t) \end{cases}$$