تقریب خطی و دیفرانسیل: فرض کنید تابع f در x_0 مشتق پذیر باشد و $x \in D_f$. اگر $\Delta x = x - x_0$، در اینصورت نمو تابع f، Δy، به صورت زیر تعریف می شود:

$$\Delta y = y - y_0 = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

از طرفی طبق تعریف مشتق

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

لذا برای Δx های به اندازه کافی کوچک

$$f'(x_0) \simeq \frac{\Delta y}{\Delta x} \Rightarrow \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \simeq f'(x_0)\Delta x$$

$$\Rightarrow f(x_0 + \Delta x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

بطور خلاصه برای هر $x \in D_f$ که f در آن مشتق پذیر است و برای هر Δx که $x + \Delta x$ نیز متعلق به D_f باشد، به شرط اینکه Δx به اندازه کافی کوچک باشد:

$$f(x + \Delta x) \simeq f(x) + f'(x)\Delta x$$

مثال: مقدار $\sin(46^\circ)$ را تقریب بزنید.

$$f(x) = \sin(x) \quad \text{و} \quad f'(x) = \cos(x)$$

$$\sin(x + \Delta x) \simeq \sin(x) + \cos(x)\Delta x$$

$$\Delta x = 1^\circ = \frac{\pi}{180} \qquad x = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$$

$$\sin(46^\circ) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180}\right) \simeq \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\frac{\pi}{180}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\pi}{180} = 0.7194$$

مثال: مقدار $\sqrt{98}$ را تقریب بزنید:

$$f(x)=\sqrt{x} \qquad f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad x=100 \qquad \Delta x=-2$$

$$\sqrt{98}=\sqrt{100-2}=\sqrt{100}+\frac{1}{2\sqrt{100}}\times(-2)=9.9$$

$$\sqrt{x+\Delta x}=\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\Delta x$$

تعریف دیفرانسیل:

فرض کنید $y=f(x)$ تابعی مشتق پذیر باشد، جمله $f'(x)\Delta x$ قسمت عمده خطی $\Delta y=\Delta f$ یا دیفرانسیل y نامیده و با dy یا df نمایش داده می‌شود:

$$df=f'(x)\Delta x \qquad (1)$$

اگر $y=x$ باشد، با توجه به تعریف بالا $\underline{dx=\Delta x}$ لذا با جایگذاری در رابطه (1) داریم:

$$\underline{df=f'(x)dx}$$

$$d(\cos(x))=-\sin(x)\,dx$$

$$d(u+v)=du+dv$$

$$d(\tan(x))=\sec^2(x)\,dx$$

$$d(uv)=u\,dv+v\,du$$