سری ها:

تعریف: یک سری نامتناهی که معمولاً سری نامیده می شود مجموع بی نهایت عبارت به فرم $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ است که آن را به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

به a_n جمله عمومی سری گفته و a_1، a_2، ... را جملات سری می گوییم. دنباله مجموع های جزئی سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1, \\ s_2 &= a_1 + a_2, \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3, \\ &\vdots \\ s_n &= a_1 + a_2 + \dots + a_n \end{aligned}$$

تعریف: سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ را همگرا به s گوییم، هرگاه دنباله مجموع های جزئی آن همگرا به s باشد یعنی $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ و در غیر اینصورت سری را واگرا گویند. مقدار s را مقدار همگرایی سری گوییم.

سری هندسی: سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \dots$$

که دارای جمله عمومی $a_n = ar^{n-1}$ است را سری هندسی با جمله اول a و قدر نسبت r می نامیم.

$$r = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

هرگاه $|r| < 1$ سری هندسی همگرا به $\frac{a}{1-r}$ است.

مثال: عدد همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}$ را به دست آورید.

حل: سری فوق یک سری هندسی با $a = e^{-1} = \frac{1}{e}$ و $r = \frac{1}{e}$ و $r < 1$. لذا این سری همگراست به

$$s = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{e}}{1-\frac{1}{e}} = \frac{1}{e-1}$$

قضیه (شرط لازم همگرایی):

اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد باید داشته باشیم $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

تهیه و تنظیم: امیرحسین سبحانی

لذا شرط لازم برای همگرایی سری این است که $\lim_{n\to\infty} a_n = ۰$.

توجه کنید که این شرط کافی نیست (به عنوان مثال سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n}$ همگرا نیست).

نکته: در بررسی رفتار یک سری اضافه کردن و یا حذف کردن تعداد متناهی جمله تاثیری در همگرایی یا واگرایی آن ندارد.

قضیه: اگر a_n یک دنباله اکیدا مثبت باشد$(a_n > ۰)$ در این صورت سری $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ یا همگراست و یا به بینهایت واگرا می شود.

قضیه: فرض کنید $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=۱}^{\infty} b_n$ همگرا باشند در این صورت:

$$۱) \sum_{n=۱}^{\infty} c a_n = c \sum_{n=۱}^{\infty} a_n$$
$$۲) \sum_{n=۱}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=۱}^{\infty} a_n + \sum_{n=۱}^{\infty} b_n$$

آزمون انتگرال جهت بررسی همگرایی سری:

اگر f یک تابع مثبت، پیوسته، و نزولی برای $x \geq ۱$ باشد و $a_n = f(n)$ در این صورت $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ و $\int_۱^{\infty} f(x)dx$ یا هر دو همگرا هستند و یا هر دو واگرا می باشند.

مثال: همگرایی سری زیر را بررسی کنید:

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{n}{n^۲ + ۱}$$

حل: با توجه به اینکه $a_n = \frac{n}{n^۲ + ۱}$ ، پس با در نظر گرفتن $f(x) = \frac{x}{x^۲ + ۱}$ داریم$a_n = f(n)$. از طرفی $f(x)$ برای $x \geq ۱$ پیوسته و مثبت است و

$$f'(x) = \frac{-x^۲ + ۱}{(x^۲ + ۱)^۲}$$

لذا $f'(x)$ برای $x \geq ۱$ منفی ، پس تابع $f(x)$ برای $x \geq ۱$ نزولی است . بنابراین همه شرایط آزمون انتگرال برقرار است لذا سری فوق با انتگرال غیر عادی زیر هم رفتار می باشد:

$$\int_۱^{\infty} \frac{x}{x^۲ + ۱} dx = \lim_{b\to\infty} \int_۱^b \frac{x}{x^۲ + ۱} dx = \lim_{b\to\infty} \frac{۱}{۲} \ln(x^۲ + ۱)\Big|_۱^b = \lim_{b\to\infty} \frac{۱}{۲}\Big(\ln(b^۲ + ۱) - \ln(۲)\Big) = \infty$$

پس سری فوق نیز واگراست.

مثال: همگرایی سری زیر را بررسی نمایید:

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^۲ + ۱}$$

حل: اگر $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ در این صورت $a_n = f(n)$ از طرفی $f(x)$ برای $x \geq 1$ تابعی مثبت، نزولی و پیوسته است.
پس طبق آزمون انتگرال رفتار این سری با انتگرال غیرعادی زیر مشابه است:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{b\to\infty} \tan^{-1}(x)\Big|_1^b = \lim_{b\to\infty} \tan^{-1}(b) - \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

پس سری فوق همگراست.

مثال: همگرایی سری زیر را بررسی نمایید:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n)}$$

اگر $f(x) = \frac{1}{x \ln(x)}$ در این صورت $a_n = f(n)$ و

$$x \geq 2 \Rightarrow f'(x) = -\frac{1+\ln(x)}{x^2 \ln(x)} < 0$$

پس f برای $x \geq 2$ تابعی مثبت، نزولی، و پیوسته است. لذا رفتار سری فوق با انتگرال غیر عادی زیر یکسان است:

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln(x)} = \lim_{b\to\infty} \int_2^{b} \frac{dx}{x \ln(x)} = \lim_{b\to\infty} \ln\big(\ln(x)\big)\Big|_2^b = \infty$$

لذا سری فوق واگراست.

سری تلسکوپی یا ادغامی:

سری $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_n)$ را سری تلسکوپی می نامند که مجموع جزئی n ام آن برابر است با:

$$s_n = (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \dots + (a_{n+1} - a_n) = a_{n+1} - a_1$$

لذا سری تلسکوپی همگراست اگر و تنها اگر حد $\lim_{n\to\infty} a_n$ موجود باشد و در این صورت:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_n) = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \big(a_n - a_1\big) = \lim_{n\to\infty} a_n - a_1$$

مثال: همگرایی سری را بررسی نمایید:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+1)}$$

حل:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = -\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}\right)$$

اگر $a_n = \frac{1}{n+1}$ سری فوق یک سری تلسکوپی است و چون $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ یک سری همگراست و

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)(n+1)}=-\left(\lim_{n\to\infty}a_n-a_1\right)=-(0-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$$

سری متناوب:

سری ای که علامت جملات آن یکی در میان عوض می شود یعنی $a_n a_{n+1}<0$ را یک سری تناوبی می نامیم. اگر $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ و دنباله $|a_n|$ نزولی باشد، سری تناوبی $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ همگراست. در واقع هر سری تناوبی با فرض اینکه $b_n>0$ را می توان به یکی از دو فرم زیر نوشت:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n\,,\qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}b_n$$

در این صورت شرط همگرایی سری تناوبی به صورت زیر است:

۱) $\lim_{n\to\infty}b_n=0$.

۲) b_n نزولی باشد یعنی $b_{n+1}\le b_n$.

مثال: سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ را در نظر بگیرید. چون $\frac{1}{n}$ نزولی است و $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ پس این سری همگراست.

$p-$سری ها و سری هارمونیک:

سری

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\dots$$

را یک $p-$سری می گوییم که p عدد ثابت و مثبتی است. اگر $p=1$ سری فوق را سری هارمونیک می نامیم. به کمک آزمون انتگرال و محاسبه انتگرال $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^p}$ به سادگی می توان نشان داد که اگر $p>1$، سری همگرا و اگر $0<p\le 1$، $p-$سری واگراست.

آزمون مقایسه:

فرض کنید $0\le a_n\le b_n$، در این صورت:

اگر $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ همگرا باشد، $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ همگراست.

اگر $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ واگرا باشد، $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ واگراست.

مثال: سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2+3^n}$ را در نظر بگیرید. چون $\frac{1}{3^n}<\frac{1}{2+3^n}<0$ و سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ یک سری هندسی با قدر نسبت کمتر از یک و لذا همگرا است، بنابراین طبق آزمون مقایسه این سری نیز همگرا می باشد.

مثال: سری $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln(n)}$ چون $\frac{1}{\ln(n)}<\frac{1}{n}$ و سری $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$ سری هارمونیک و واگراست لذا طبق آزمون مقایسه سری $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln(n)}$ نیز واگراست.

آزمون مقایسه حدی:

فرض کنید $a_n, b_n > ۰$ و $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$ که در آن l عددی متناهی و مثبت است $(l \neq ۰)$. در این صورت دو سری $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=۱}^{\infty} b_n$ یا هر دو همگرا هستند و یا هر دو واگرا می باشند. اگر $l = ۰$ و سری $\sum_{n=۱}^{\infty} b_n$ همگرا باشد سری $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ نیز همگرا است و اگر $l = \infty$ و سری $\sum_{n=۱}^{\infty} b_n$ واگرا باشد سری $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ نیز واگرا می باشد.

مثال:

$$۱) \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{cn + b}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{۱}{n}}{\frac{۱}{cn+b}} = \lim_{n\to\infty} \frac{cn+b}{n} = c$$

لذا این سری با سری هارمونیک $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n}$ طبق آزمون مقایسه حدی هم رفتار و بنابراین واگرا می باشد.

$$۳) \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^۲ + ۱}$$

$$a_n = \frac{\ln(n)}{n^۲+۱}, \quad b_n = \frac{۱}{n^{۳/۲}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\ln(n)}{n^۲+۱}}{\frac{۱}{n^{۳/۲}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n) n^{۳/۲}}{n^۲+۱} \overset{H}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n} + \frac{۳}{۲}\sqrt{n}\ln(n)}{۲n} = \lim_{n\to\infty} \frac{۱ + \frac{۳}{۲}\ln(n)}{۲\sqrt{n}} \overset{H}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{۳}{۲n}}{\frac{۱}{\sqrt{n}}} = ۰$$

چون $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^{\frac{۳}{۲}}}$ یک $p-$ سری همگراست، طبق آزمون مقایسه حدی سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^۲+۱}$ همگراست.

$$۲) \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{۳n^۲ - ۴n + ۵}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{۱}{n^۲}}{\frac{۱}{۳n^۲ - ۴n + ۵}} = \lim_{n\to\infty} \frac{۳n^۲ - ۴n + ۵}{n^۲} = ۳$$

پس طبق آزمون مقایسه حدی این سری نیز چون سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^۲}$ یک $p-$ سری همگراست$\left(p = ۲ > ۱\right)$، همگرا می باشد.

همگرایی مطلق و مشروط: سری $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ را همگرای مطلق گوییم، هرگاه $\sum_{n=۱}^{\infty} |a_n|$ همگرا باشد. سری $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ راهمگرای مشروط گوییم هرگاه $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ همگرا و $\sum_{n=۱}^{\infty} |a_n|$ واگرا باشد.

نکته: با توجه به آزمون مقایسه، همگرایی $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ ، همگرایی $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ را نتیجه می دهد.

مثال: سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{5^n}$ را در نظر بگیرید. با توجه به اینکه $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}$ یک سری هندسی همگراست، لذا این سری یک سری همگرای مطلق می باشد.

قضیه آزمون نسبت:

فرض کنید $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ یک سری با جملات ناصفر باشد، همچنین فرض کنید $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l$ در این صورت:

۱) اگر $l < 1$ ، سری همگرای مطلق است.

۲) اگر $l > 1$ ،سری واگراست.

۳) اگر $l = 1$ آزمون بی نتیجه است.

آزمون ریشه n ام کوشی:

سری $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ را در نظر بگیرید و فرض کنید $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = l$ در این صورت

۱) اگر $l < 1$ ، سری همگرای مطلق است.

۲) اگر $l > 1$ یا $l = \infty$ سری واگرا است.

۳) اگر $l = 1$ آزمون بی نتیجه است.

مثال: همگرایی سری های زیر را بررسی کنید:

$$1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2n}}{n^n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{e^{2n}}{n^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{e^2}{n} = 0 < 1$$

پس با توجه به آزمون ریشه، سری همگرای مطلق است.

$$2)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1$$

با توجه به آزمون ریشه سری همگرا است.

$$3)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n} = 0 < 1$$

بنابراین با توجه به آزمون نسبت سری همگرای مطلق است.

$$۴)\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{n^{۲}۲^{n+۱}}{۳^{n}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+۱}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+۱)^{۲}۲^{n+۲}}{۳^{n+۱}}}{\frac{n^{۲}۲^{n+۱}}{۳^{n}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{۳^{n}(n+۱)^{۲}۲^{n+۲}}{۳^{n+۱}n^{۲}۲^{n+۱}} = \lim_{n\to\infty}\frac{۲(n+۱)^{۲}}{۳n^{۲}} = \frac{۲}{۳} < ۱$$

طبق آزمون نسبت، سری همگرای مطلق است.

$$۵)\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{n^{n}}{n!}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+۱}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+۱)^{n+۱}}{(n+۱)!}}{\frac{n^{n}}{n!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n!(n+۱)^{n+۱}}{(n+۱)!n^{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+۱)^{n+۱}}{(n+۱)n^{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+۱)^{n}}{n^{n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+۱}{n}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^{n} = e > ۱$$

در نتیجه طبق آزمون نسبت سری واگراست.

سری توانی:

سری

$$\sum_{n=۰}^{\infty}a_n(x-c)^{n} = a_۰ + a_۱(x-c) + a_۲(x-c)^{۲} + \ldots.$$

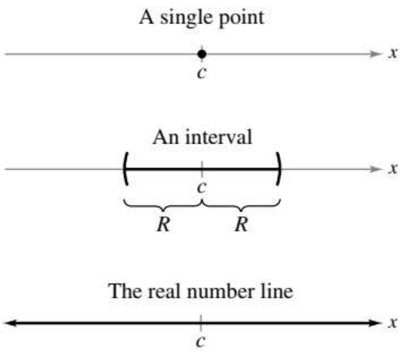
یک سری توانی از $(x-c)$ یا یک سری توانی حول نقطه c نام دارد. مقادیر a_i را ضرایب سری توانی می‌گوییم.

قضیه: برای هر سری توانی به فرم $\sum_{n=۰}^{\infty}a_n(x-c)^{n}$ یکی از سه حالت زیر برقرار است:

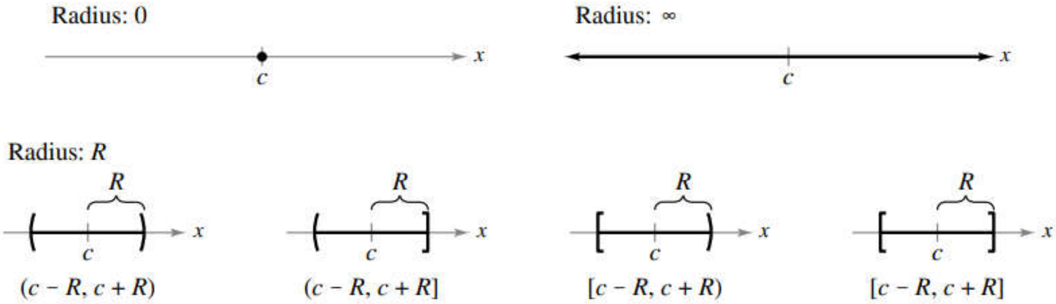
۱) سری فقط در $x=c$ همگرا است.

۲) عددی مانند R چنان موجود است که سری برای همه x هایی که $|x-c|<R$ همگرا و به ازای x هایی که $|x-c|>R$ واگراست . در نقاط انتهایی $(x=c\pm R)$ ممکن است سری همگرا و یا واگرا باشد. در این صورت R را شعاع همگرایی سری و c را مرکز همگرایی می نامیم.

۳) سری در کل $\mathbb{R}$ همگراست، یعنی شعاع همگرایی برابر ∞ است.



تعریف بازه همگرایی: مجموعه نقاطی که در آن سری توانی همگراست را بازه همگرایی گویند.



قضیه (آزمون نسبت برای تعیین شعاع همگرایی):

اگر $l = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ ، شعاع همگرایی سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ برابر است با $R = \frac{1}{l}$. اگر $l = 0$ باشد، $R = \infty$ و اگر $l = \infty$ باشد $R = 0$ است.

قضیه (آزمون ریشه برای تعیین شعاع همگرایی): اگر $l = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ موجود باشد و $R = \frac{1}{l}$ در این صورت شعاع همگرایی سری توانی برابر R است.

نکته: در هر دو بحث فوق در مورد شعاع سری های توانی از همان آزمون نسبت و آزمون ریشه کوشی استفاده شده است. پس همیشه می‌توانید به صورت مستقیم از این دو آزمون استفاده کنید.

مثال: فاصله همگرایی سری های زیر را بررسی کنید

$$1)\sum_{n=0}^{\infty} n!\,x^n$$

$$l = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!} = \infty$$

پس شعاع همگرایی برابر $R = \frac{1}{l} = 0$ است و مرکز همگرایی نقطه صفر می باشد. پس این سری فقط **در نقطه صفر** همگراست.

$$۲)\sum_{n=۰}^{\infty} ۳(x-۲)^n$$
$$l=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+۱}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{۳}{۳}=۱ \Rightarrow R=\frac{۱}{l}=۱$$

پس اگر $|x-۲|<۱$ سری همگرا ست. حال باید نقاط ابتدایی و انتهایی را بررسی کنیم:

$$x=۱\Rightarrow \sum_{n=۰}^{\infty}۳(-۱)^n$$
$$x=۳\Rightarrow \sum_{n=۰}^{\infty}۳$$

لذا در $x=۱$ و $x=۳$ واگراست. بنابراین فاصله همگرایی برابر است با $I=(۱,۳)$.

$$۳)\sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^n\frac{x^{۲n+۱}}{(۲n+۱)!}$$

در این مسئله می‌خواهیم به صورت مستقیم فاصله همگرایی را محاسبه کنیم.

$$l=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+۱}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{x^{۲n+۳}}{(۲n+۳)!}}{\frac{x^{۲n+۱}}{(۲n+۱)!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x^۲}{(۲n+۳)(۲n+۱)}=۰<۱$$

سری برای هر $x\in\mathbb{R}$ همگراست. لذا شعاع همگرایی $R=\infty$ می باشد و فاصله همگرایی $\mathbb{R}$.

$$۴)\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{۲^n}(۱+\frac{۱}{n})^{n^۲}(x-۱)^n$$
$$l=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^{n^۲}}{۲^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{۲}(۱+\frac{۱}{n})^n=\frac{e}{۲}$$

\

پس شعاع همگرایی برابر است با $R=\frac{۱}{l}=\frac{۲}{e}$ لذا اگر

$$|x-۱|<\frac{۲}{e}$$

سری همگراست. حال باید همگرایی سری در نقاط ابتدا و انتهای بازه بالا یعنی $x=۱\pm\frac{۲}{e}$ بررسی شود.

$$x=۱+\frac{۲}{e}\Rightarrow\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{۲^n}(۱+\frac{۱}{n})^{n^۲}\left(\frac{۲}{e}\right)^n=\frac{۱}{e^n}(۱+\frac{۱}{n})^{n^۲}$$
$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{e^n}(۱+\frac{۱}{n})^{n^۲}=\frac{۱}{\sqrt{e}}\neq ۰$$

چون شرط لازم همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ آن است که $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ پس سری توانی در $x = 1+\frac{2}{e}$ واگراست. به صورت مشابه می توان نشان داد در $x = 1-\frac{2}{e}$ سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{e^n}(1+\frac{1}{n})^{n^2}$ واگراست، پس فاصله همگرایی برابر است با $(1-\frac{2}{e}, 1+\frac{2}{e})$.

نمایش تابع به کمک سری توانی:

مثال: سری توانی زیر را در نظر بگیرید:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$

این سری در واقع یک سری هندسی است که اگر $|x| < 1$ همگرا به تابع $\frac{1}{1-x}$ است. پس داریم:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots \quad -1 < x < 1$$

مثال: یک سری توانی برای نمایش تابع $\frac{1}{1-x^2}$ یافته و فاصله همگرایی آنرا بیابید.

حل: از سری توانی تابع $\frac{1}{1-x}$ استفاده می کنیم و به جای x، x^2 قرار می دهیم:

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + \ldots$$

این سری زمانی همگراست که $|x^2| < 1$ باشد یعنی فاصله همگرایی این سری $(-1,1)$ است.

مثال: به کمک یک سری توانی $\frac{1}{x+2}$ را نمایش دهید.

حل:

$$\frac{1}{x+2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\frac{x}{2}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-(-\frac{x}{2})}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{8} + \frac{x^4}{16} + \ldots\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}x^n$$

این سری همگراست اگر $\left|-\frac{x}{2}\right| < 1$، یعنی فاصله همگرایی برابر با $(-2,2)$ است.

مثال: به کمک یک سری توانی $\frac{x^3}{x+2}$ را نمایش دهید.

حل: با توجه به مثال قبل داریم:

$$\frac{x^۳}{x+۲} = x^۳\,\frac{۱}{x+۲} = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{(-۱)^n}{۲^{n+۱}} x^{n+۳}$$

که فاصله همگرایی آن مشابه مثال قبل برابر $(-۲,۲)$ است و آنرا می توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\frac{x^۳}{x+۲} = \sum_{n=۳}^{\infty} \frac{(-۱)^{n-۱}}{۲^{n-۲}} x^n$$

انتگرال گیری و مشتق گیری از سری های توانی:

قضیه: فرض کنید سری توانی $\sum_{n=۰}^{\infty} c_n (x-c)^n$ دارای شعاع همگرایی $R>۰$ باشد. در این صورت تا بع

$$f(x) = \sum_{n=۰}^{\infty} a_n (x-c)^n = a_۰ + a_۱(x-c) + a_۲(x-c)^۲ + \dots$$

روی بازه $(a-R, a+R)$ مشتق پذیر و انتگرال پذیر است و داریم:

$$f'(x) = \sum_{n=۱}^{\infty} n a_n (x-c)^{n-۱} = a_۱ + ۲a_۲(x-c) + ۳a_۳(x-c)^۲ + \dots$$

$$\int f(x)dx = C + \sum_{n=۰}^{\infty} a_n \frac{(x-c)^{n+۱}}{n+۱} = a_۰(x-c) + a_۱\frac{(x-c)^۲}{۲} + a_۲\frac{(x-c)^۳}{۳} + \dots$$

که شعاع همگرایی برای این دو سری توانی اخیر برابر با همان R است.

مثال: $\frac{۱}{(۱-x)^۲}$ را به کمک یک سری توانی نمایش دهید.

حل:

$$\frac{۱}{۱-x} = ۱ + x + x^۲ + x^۳ + \dots \quad -۱<x<۱$$

لذا:

$$\left(\frac{۱}{۱-x}\right)' = \frac{۱}{(۱-x)^۲} = ۱ + ۲x + ۳x^۲ + ۴x^۳ + \dots = \sum_{n=۱}^{\infty} n x^{n-۱} \quad -۱<x<۱$$

مثال: یک سری توانی برای نمایش $\ln(۱+x)$ بیابید.

حل:

$$\frac{1}{1+x}=\frac{1}{1-(-x)}=1-x+x^2-x^3+x^4+\dots$$
$$\ln(1+x)=\int\frac{dx}{1+x}=C+x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$$

تمرین: یک سری توانی جهت نمایش $\tan^{-1}(x)$ بیابید.

بسط تیلور و مک لورن:

قضیه و تعریف: هر گاه تابع f یک نمایش به صورت سری توانی حول نقطه a به شعاع همگرایی R داشته باشد در این صورت این سری توانی به صورت زیر است:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2+\frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3+\dots\qquad |x-a|<R$$

سری فوق را بسط تیلور تابع f حول نقطه a می گویند. در حالت خاص بسط تیلور حول نقطه صفر را بسط مک لورن تابع f گوییم.

مثال: بسط مک لورن تابع e^x را بیابید و شعاع همگرایی آن را محاسبه نمایید.

حل: با فرض اینکه $f(x)=e^x$ داریم:

$$f^{(n)}(0)=e^x\Big|_{x=0}=1\Rightarrow f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots.$$

حال برای بررسی شعاع همگرایی از آزمون دالامبر کمک می گیریم:

$$l=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$$

لذا $R=\frac{1}{l}=\infty$. پس این سری همه جا به تابع e^x همگراست.

در ادامه سری مک لورن برخی توابع مشهور آمده است:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \qquad R = 1$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \qquad R = \infty$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \qquad R = \infty$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \qquad R = \infty$$

$$\tan^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \qquad R = 1$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \qquad R = 1$$

$$(1+x)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}x^3 + \cdots \qquad R = 1$$

تمرین: بسط مک لورن تابع $f(x) = x\cos(x^۲)$ را بیابید.