دنباله ها:

تعریف دنباله: لیست مرتبی از اعداد مانند $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ را یک دنباله گویند. a_1 را جمله اول دنباله a_2 را جمله دوم دنباله و a_n را جمله ام دنباله در نظر می‌گیرند. معمولا جملات دنباله را اعداد حقیقی در نظر می گیریم، اگر چه بسیاری از تعاریف در مورد اعداد مختلط نیز درست است.

n را اندیس جمله a_n گویند. همچنین دنباله را می توان به عنوان تابعی در نظر گرفت که اعداد طبیعی را به اعداد حقیقی می برد. به عنوان مثال دنباله $\{2, 4, 6, 8, \ldots\}$ را می توان به صورت $a_n = 2n$ در نظر گرفت.

در حالت کلی به سه طریق می توان دنباله را مشخص کرد:

۱- نوشتن چند جمله از دنباله و سپس سه نقطه در صورتی که الگوی دنباله مشخص باشد.

۲- نوشتن یک فرمول برای جمله عمومی دنباله a_n، به صورت تابعی از n یعنی $a_n = f(n)$.

۳- ارائه یک فرمول برای محاسبه a_n به کمک $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_{n-r}$ و همچنین ارائه r جمله اول دنباله یعنی $a_1, a_2, \ldots, a_r$.

دنباله $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ را می توان به صورت $\{a_n\}$ خلاصه کرد.

مثال:

$$\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\},\ \left\{\frac{n-1}{n}\right\},\ \left\{\cos(n-1)\pi\right\},\ \left\{\frac{n^2}{2^n}\right\},\left\{\frac{\cos\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)}{n}\right\}$$

$$a_1 = 1, a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}$$

دنباله فیبوناچی:

$$a_1 = 1, a_2 = 1, a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$$

$$\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots\}$$

تعریف: دنباله $\{a_n\}$ را از پایین کراندار گوییم هر گاه ثابتی مانند L موجود باشد که

$$\forall n \in \mathbb{N},\ L \le a_n$$

در این صورت L را کران پایین دنباله $\{a_n\}$ گوییم. همچنین دنباله $\{a_n\}$ را از بالا کراندار گوییم هرگاه

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n \le M$$

در این صورت M را کران بالای دنباله $\{a_n\}$ می نامیم. در نهایت دنباله $\{a_n\}$ را کراندار گوییم هرگاه از بالا و از پایین کراندار باشد، به طور معادلی یعنی ثابتی چون k موجود باشد که

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |a_n| \le k$$

تعریف: دنباله a_n را صعودی (نزولی) گوییم، اگر برای هر $n \in \mathbb{N}$، $a_n \le a_{n+1}$ ($a_n \ge a_{n+1}$).

دنباله $\{a_n\}$ را یکنوا گوییم هر گاه صعودی یا نزولی باشد.

دنباله $\{a_n\}$ را تناوبی گوییم هر گاه برای هر $n \in \mathbb{N}$، $a_n a_{n+1} < 0$ یعنی هر دو جمله متوالی آن مختلف العلامت باشند.

مثال: نشان دهید دنباله $a_n = \frac{n}{n^2+1}$ دنباله ای نزولی است.

حل: اگر $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ در اینصورت $a_n = f(n)$. از طرفی برای هر $x \ge 1$ داریم:

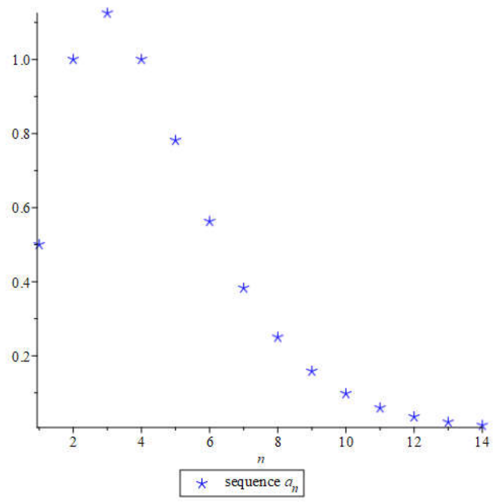
$$f'(x) = \frac{(x^2+1) - 2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} \le 0$$

لذا $\{a_n\}$ یک دنباله نزولی است.

مثال: دنباله $\left\{\frac{n^2}{2^n}\right\}$ به فرم $\left\{\frac{1}{2}, 1, \frac{9}{8}, 1, \frac{25}{32}, \frac{36}{64}, \dots\right\}$ دنباله ای مثبت، از پایین کراندار، و از **جایی به بعد نزولی** است.

زیرا

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}} = \frac{(n+1)^2 2^n}{n^2 2^{n+1}} = \frac{(n+1)^2}{2n^2}$$



پس $\frac{۱}{۲} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+۱}}{a_n}$ لذا با توجه به اینکه $\{a_n\}$ دنباله ای مثبت است پس از جایی به بعد $a_{n+۱} \leq a_n$.

تعریف (حد دنباله ها): دنباله $\{a_n\}$ را همگرا به حد L گوییم، هرگاه

$$\forall \varepsilon > ۰, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq \mathbb{N} \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$$

و می نویسیم $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

مثال: نشان دهید که برای هر عدد حقیقی ثابت c و هر $p > ۰$ داریم $\lim_{n\to\infty} \frac{c}{n^p} = ۰$.

حل: فرض کنید $\varepsilon > ۰$، در این صورت

$$\left|\frac{c}{n^p}\right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{|c|}{\varepsilon} < n^p \Rightarrow \left(\frac{|c|}{\varepsilon}\right)^{\frac{۱}{p}} < n$$

لذا اگر $N = \left[\left(\frac{|c|}{\varepsilon}\right)^{\frac{۱}{p}}\right] + ۱$ برای هر $n \geq N$، $|a_n| < \varepsilon$ پس $\lim_{n\to\infty} a_n = ۰$.

هر دنباله به یک عدد متناهی مانند L همگراست و یا واگراست، اگر $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ یا $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ به طور خلاصه می گوییم دنباله $\{a_n\}$ واگرا می شود به بینهایت.

نکته: اگر $a_n = f(n)$ و $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ آنگاه $\lim_{x\to\infty} a_n = L$.

قضیه: اگر $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دنباله هایی همگرا باشند:

$$۱) \lim_{n\to\infty} a_n \pm b_n = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$$
$$۲) \lim_{n\to\infty} ca_n = c \lim_{n\to\infty} a_n$$
$$۳) \lim_{n\to\infty} a_n b_n = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)\left(\lim_{n\to\infty} b_n\right)$$

اگر $\lim_{n\to\infty} b_n \neq ۰$،
$$۴) \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$$

اگر $a_n \leq b_n$ آنگاه $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ (۵

(قضیه ساندویچ یا فشار) اگر $a_n \leq c_n \leq b_n$ و $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$ آنگاه $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = L$.

تمرین: حد دنباله های زیر را محاسبه کنید:

$$۱)\ \lim_{n\to\infty} \frac{۲n^{۲} - n - ۱}{۵n^{۲} + n - ۳} \qquad ۲)\ \lim_{n\to\infty} \frac{\cos(n)}{n}$$

$$۳)\ \lim_{n\to\infty} \sqrt{n^{۲} + ۲n} - n \qquad ۴)\ \lim_{n\to\infty} n \tan^{-۱}\left(\frac{۱}{n}\right)$$

قضیه: اگر $\{a_n\}$ دنباله ای همگرا باشد، آنگاه $\{a_n\}$ کراندار است.

قضیه: اگر $\{a_n\}$ دنباله ای از بالا کراندار و از جایی به بعد صعودی باشد و یا اگر $\{a_n\}$ دنباله ای از پایین کراندار و از جایی به بعد نزولی باشد، دنباله $\{a_n\}$ همگراست.

به همین ترتیب داریم:

قضیه: اگر $\{a_n\}$ دنباله ای کراندار و یکنوا باشد، همگراست.

اصل استقراء ریاضی: فرض کنید $P(n)$ گزاره‌ای در مورد عدد طبیعی n باشد. فرض کنید که

۱- $P(۱)$ درست باشد.
۲- درستی $P(k)$، درستی $P(k+۱)$ را نتیجه دهد.

در این صورت گزاره $P(n)$ برای هر عدد طبیعی برقرار است.

مثال: نشان دهید که دنباله بازگشتی $a_۱ = ۱,\ a_{n+۱} = \sqrt{۶ + a_n}$ همگراست و حد آنرا بیابید.

حل: اولا به کمک استقرای ریاضی ثابت می کنیم این دنباله صعودی است، یعنی $a_n \leq a_{n+۱}$.

پایه استقراء: $a_۱ = ۱ \leq a_۲ = \sqrt{۷}$

فر ض می‌کنیم $a_k \leq a_{k+۱}$ (فرض استقراء) می خواهیم نشان دهیم $a_{k+۱} \leq a_{k+۲}$. توجه کنید که

$$a_{k+۱} = \sqrt{۶ + a_k} \underset{a_{k+۱} \geq a_k}{\leq} \sqrt{۶ + a_{k+۱}} = a_{k+۲}$$

لذا حکم استقراء برقرار است و بنابراین این دنباله صعودی است. حال نشان می دهیم این دنباله از بالا کراندار است و ۳ یک کران بالای آن است. جهت اثبات این گزاره از استقراء ریاضی کمک می گیریم. اولا ۳ $a_1 = 1 \leq 3$. حال اگر $a_k \leq 3$ (فرض استقراء) در اینصورت $a_{k+1} \leq \sqrt{6+a_k} \leq \sqrt{9} = 3$ (حکم استقراء). لذا $\{a_n\}$ یک دنباله صعودی و از بالا کراندار است، پس همگراست. حال می خواهیم حد دنباله را پیدا کنیم، با توجه به تعریف این دنباله بازگشتی داریم:

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{6+a_n}$$

اگر $L = \lim_{n\to\infty} a_n$ با توجه به اینکه $\lim_{n\to\infty} a_{n+k} = \lim_{n\to\infty} a_n$ ، داریم:

$$L = \sqrt{6+L} \Rightarrow L^2 = 6+L \Rightarrow L^2 - L - 6 = 0$$

لذا

$$(L-3)(L+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} L = 3 \\ L = -2 \end{cases}$$

اما چون این دنباله یک دنباله مثبت است جواب $L = -2$ غیرقابل قبول است، پس $L = 3$.

تمرین: همگرایی دنباله $a_1 = 1, a_{n+1} = \sqrt{1+2a_n}$ را بررسی کنید.

تمرین: اگر $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ به کمک رابطه $\ln(a_n) = n\ln(1+\frac{1}{n})$ نشان دهید که $\{a_n\}$ صعودی است و سپس نشان دهید از بالا به e کراندار است.

قضیه: اگر $\{a_n\}$ دنباله ای صعودی (از جایی به بعد) باشد، در این صورت یا از بالا کراندار است و همگرا و یا واگرا به بینهایت است.

حدود مهم:

$$1)\ \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x} \overset{H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

$$۲)\ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = ۱$$

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{x} = \lim_{x\to\infty} x^{\frac{۱}{x}} = e^{\lim_{x\to\infty} \frac{۱}{x}\ln(x)} = e^{۰} = ۱$$

$$۳)\ \lim_{n\to\infty} x^{\frac{۱}{n}} = ۰$$

$$۴)\ \lim_{n\to\infty} \left(۱ + \frac{x}{n}\right)^{n} = e^{x}$$

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left(\left(۱ + \frac{x}{n}\right)^{n}\right) = \lim_{n\to\infty} n \ln\left(۱ + \frac{x}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(۱ + \frac{x}{n}\right)}{\frac{۱}{n}} \overset{H}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{-\frac{x}{n^{۲}}}{۱ + \frac{x}{n}}}{\frac{-۱}{n^{۲}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{۱ + \frac{x}{n}} = x$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left(۱ + \frac{x}{n}\right)^{n} = e^{x}$$

$$۵)\ \lim_{n\to\infty} \frac{x^{n}}{n!} = ۰$$