## آنالیز برداری :

تعریف : یک میدان برداری روی دامنه‌ای از فضا یا از صفحه عبارتست از تابعی که به هر نقطه از دامنه، برداری نسبت می‌دهد. یک میدان برداری روی ناحیه R از صفحه تابعی مانند $\vec{F}$ است که به هر نقطه از R برداری مانند $\vec{F}(x,y)$ نسبت می‌دهد. به همین ترتیب یک میدان برداری روی ناحیه Q در فضا تابعی مانند $\vec{F}$ است که به هر نقطه از Q بردار $\vec{F}(x,y,z)$ را نسبت می‌دهد.

گرادیان یک مثال از میدان برداری است. برای مثال اگر $f(x,y)=x^2y+3xy^3$ باشد، در اینصورت

$$\nabla f=\frac{\partial f}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\hat{j}$$

$$=(2xy+3y^3)\hat{i}+(x^2+9xy^2)\hat{j}$$

یک میدان برداری در صفحه است. به همین ترتیب اگر $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ در اینصورت

$$\nabla f=\frac{\partial f}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}$$

$$=2x\hat{i}+2y\hat{j}+2z\hat{k}$$

یک میدان برداری در فضا است. توجه کنید که $\nabla f$ هر میدان اسکالر f جهت و اندازه بیشترین میزان افزایش f در نقطه $(x,y,z)$ را می‌دهد. (توجه کنید که یک تابع چند متغیره حقیقی را یک تابع اسکالر می‌گوییم)

میدان برداری $\vec{F}(x,y,z)=M(x,y,z)\hat{i}+N(x,y,z)\hat{j}+P(x,y,z)\hat{k}$

را در یک نقطه پیوسته گوییم هرگاه توابع مؤلفه‌ای M، N، و P در آن نقطه پیوسته باشند. یک میدان برداری را هموار گوییم هرگاه توابع مؤلفه‌ای آن دارای مشتقات جزئی پیوسته از همه مراتب باشند.

در ادامه فهرست برخی از میدان های برداری در فیزیک آورده می شود :

1- میدان سرعت $\vec{V}(x,y,z)$ در یک سیال عبارتست از سرعت حرکت ذره در نقطه $(x,y,z)$. اگر حرکت «یکنواخت» نباشد، آنگاه میدان سرعت به زمان نیز وابسته است ، $\vec{V}=\vec{V}(x,y,z,t)$.

2- میدان گرانش $\vec{F}(x,y,z)$ که نیروی جاذبه یک جسم به جرم $m_2$ که به جسمی به جرم $m_1$ در فضا وارد می کند. اگر فرض کنیم که جسم به جرم $m_2$ در $(0,0,0)$ قرار داشته باشد،

$$\vec{F}(x,y,z) = -\frac{G m_1 m_2}{x^2+y^2+z^2}\,\hat{u}$$

که در آن $G$ ثابت گرانش نیوتن و $\hat{u}$ بردار یکه جهت از مبداء به $(x,y,z)$ است. به کمک بردار مکان $\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$ ، می توان میدان گرانش $\vec{F}$ را به صورت زیر نوشت:

$$\vec{F}(x,y,z) = \frac{-G m_1 m_2}{|\vec{r}|^2}\,\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{-G m_1 m_2}{|\vec{r}|^2}\,\hat{u}$$

3- میدان الکتریکی

$$\vec{F} = \frac{c q_1 q_2}{|\vec{r}|^2}\,\hat{u}$$

تعریف : (میدان مربع معکوس) فرض کنید $\vec{r}(t)=x(t)\hat{i}+y(t)\hat{j}+z(t)\hat{k}$ بردار مکان باشد.

میدان برداری $\vec{F}$ یک میدان مربع معکوس است هرگاه :

$$\vec{F}(x,y,z) = \frac{k}{|\vec{r}|^2}\,\hat{u}$$

که در آن $k$ یک عدد حقیقی و $\hat{u}=\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$ است .

میدان گرانش و میدان الکتریکی هر دو میدان مربع معکوس است.

تعریف (میدان برداری پایستار): یک میدان برداری را پایستار (ابقایی) گوییم هرگاه یک تابع مشتق پذیر مانند $f$ چنان موجود باشد که $\vec{F} = \nabla f$. تابع $f$ را تابع پتانسیل $\vec{F}$ می گوییم.

مثال 1: $\vec{F} = 2x\hat{i} + y\hat{j}$ یک میدان پایستار است چرا که اگر $f(x,y) = x^2 + \frac{1}{2}y^2$ داریم:

$$\nabla f = 2x\hat{i} + y\hat{j} = \vec{F}$$

پس $f$ پتانسیل $\vec{F}$ است.

مثال 2: هر میدان مربع معکوس یک میدان پایستار است. برای اثبات کافیست میدان برداری را $\vec{F} = \frac{k}{|\vec{r}|^2}\vec{u}$ و پتانسیل $f = \frac{-k}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ در نظر گرفته شود.

$$\nabla f = \frac{kx}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\hat{i} + \frac{ky}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\hat{j} + \frac{kz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\hat{k}$$

$$= \frac{k}{(x^2+y^2+z^2)}\left(\frac{x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) = \frac{k}{|\vec{r}|^2}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

$$= \frac{k}{|\vec{r}|^2}\hat{u}$$

قضیه (آزمون پایستاری یک میدان برداری): فرض کنید $M$ و $N$ توابعی با مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته باشند. در اینصورت $F(x,y)=M\,\hat{i}+N\,\hat{j}$ یک میدان برداری پایستار است اگر و تنها اگر $\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial M}{\partial y}$.

مثال[3]: پایستاری میدان های برداری زیر را بررسی کنید.

1) $\vec{F}(x,y)=\underbrace{xy^2}_{M}\,\hat{i}+\underbrace{x^2y}_{N}\,\hat{j}$ $\qquad \frac{\partial M}{\partial y}=2xy,\ \frac{\partial N}{\partial x}=2xy$

لذا $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ پس $\vec{F}$ ابقای است.

2) $\vec{F}(x,y)=\underbrace{\sin(y)}_{M}\,\hat{i}+\underbrace{x\sin(y)}_{N}\,\hat{j}$ $\qquad \frac{\partial M}{\partial y}=\cos(y),\ \frac{\partial N}{\partial x}=\sin(y)$

پس چون $\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$، $\vec{F}$ پایستار نیست.

در مثال زیر نحوه محاسبه پتانسیل یک میدان برداری بیان می‌شود.

مثال[4]: پتانسیل میدان برداری $\vec{F}(x,y)=\underbrace{2xy}_{M}\,\hat{i}+\underbrace{(x^2-y)}_{N}\,\hat{j}$ را بیابید.

$$\frac{\partial M}{\partial y}=2x=\frac{\partial N}{\partial x}\Rightarrow \vec{F}\ \text{پایستار است}$$

پس تابعی چون $f$ موجود است که $\nabla f=\vec{F}$ لذا

$$\frac{\partial f}{\partial x}=M,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=N$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=M=2xy\Rightarrow f=\int 2xy\,dx=x^2y+h(y) \qquad (1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=N=(x^2-y)\Rightarrow f=\int (x^2-y)\,dy=x^2y-\frac{y^2}{2}+h(x) \qquad (2)$$

لذا $f$ اجتماع (1) و (2) است بعلاوه ثابت $c$. باید دقت کنیم که جملات تکراری را یکبار در $f$ می‌نویسیم:

$$f=x^2y-\frac{y^2}{2}+c$$

تعریف: کرل میدان برداری $\vec{F} = M\hat{i} + N\hat{j} + P\hat{k}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\operatorname{curl} \vec{F}(x,y,z) = \nabla \times \vec{F}(x,y,z) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & N & P \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}\right)\hat{i} - \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial z}\right)\hat{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\hat{k}$$

توجه کنید که عملگر $\nabla$ «دل» به صورت $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$ تعریف می‌شود.

تذکر: کرل یک میدان برداری، میدان برداری است. همچنین کرل را تاو یا چگالی گردش نیز می‌نامند. میدان برداری $\vec{F}$ را غیرچرخشی می‌نامیم هرگاه $\operatorname{curl}(\vec{F}) = \vec{0}$.

مثال 5: اگر $\vec{F}(x,y,z) = 2xy\,\hat{i} + (x^2+z^2)\hat{j} + 2yz\,\hat{k}$، نشان دهید که $\vec{F}$ غیرچرخشی است.

$$\operatorname{curl}(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy & x^2+z^2 & 2yz \end{vmatrix} = (2z - 2z)\hat{i} - (0-0)\hat{j} + (2x-2x)\hat{k} = \vec{0}$$

لذا $\vec{F}$ غیرچرخشی است.

قضیه (آزمون پایستاری در فضا): فرض کنید $M$، $N$ و $P$ توابعی با مشتقات جزئی اول پیوسته در گوی باز $Q$ در فضا باشند. میدان برداری

$$\vec{F}(x,y,z) = M\hat{i} + N\hat{j} + P\hat{k}$$

یک میدان پایستار «ابقایی» است هرگاه $\operatorname{curl}(\vec{F}) = \vec{0}$ یعنی:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial z}, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$$

مثال 6: با توجه به اینکه در مثال قبل کرل میدان برداری $\vec{F} = 2xy\,\hat{i} + (x^2+z^2)\,\hat{j} + 2yz\,\hat{k}$

صفر شد، $\vec{F}$ یک میدان پایستار در فضاست. حال پتانسیل $\vec{F}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$M = \frac{\partial f}{\partial x} \Rightarrow f = \int M\,dx \Rightarrow f(x,y,z) = \int 2xy\,dx = x^2y + g(y,z)$$

$$N = \frac{\partial f}{\partial y} \Rightarrow f = \int N\,dy \Rightarrow f(x,y,z) = \int (x^2+z^2)\,dy = x^2y + yz^2 + h(x,z)$$

$$P = \frac{\partial f}{\partial z} \Rightarrow f = \int P\,dz \Rightarrow f(x,y,z) = \int (2yz)\,dz = yz^2 + k(x,y)$$

با مقایسه این سه عبارت داریم:

$$f(x,y,z) = x^2y + yz^2 + C$$

تعریف: دیورژانس میدان برداری $\vec{F}$ یک میدان اسکالر است که به صورت $\vec{\nabla}\cdot\vec{F}$ تعریف

می‌شود. (صفحه)
$$div(\vec{F}(x,y)) = \vec{\nabla}\cdot\vec{F}(x,y) = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}$$

$$div(\vec{F}(x,y,z)) = \vec{\nabla}\cdot\vec{F}(x,y,z) = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \quad (\text{فضا})$$

مثال 7: دیورژانس میدان برداری $\vec{F} = x^3y^2z\,\hat{i} + x^2z\,\hat{j} + x^2y\,\hat{k}$ را بیابید.

$$div(\vec{F}) = \vec{\nabla}\cdot\vec{F} = 3x^2y^2z + 0 + 0 = 3x^2y^2z$$

قضیه: اگر $\vec{F} = M\hat{i} + N\hat{j} + P\hat{k}$ یک میدان برداری و $M$، $N$، $P$ توابع با مشتقات

جزئی مرتبه دوم پیوسته باشند، در اینصورت:

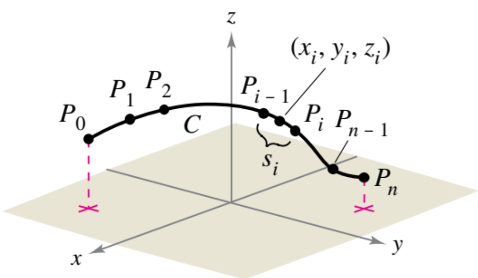
$$div(curl(\vec{F})) = \vec{0}$$

## انتگرال منحنی الخط :

انتگرال منحنی الخط یعنی انتگرال توابع روی خم‌ها. فرض کنید $f(x,y,z)$ تابعی باشد که دامنه‌اش شامل منحنی زیر است:

$$C: \quad \vec{r}(t) = x(t)\,\hat{i} + y(t)\,\hat{j} + z(t)\,\hat{k} \qquad a \le t \le b$$

C را به کمک نقاط $P_0, P_1, \dots, P_n$ به n زیرقوس افراز می‌کنیم و نرم افراز را با $\|\Delta\|$ نمایش می‌دهیم که طول بزرگترین زیرقوس است.




و فرض می‌کنیم طول قوس زیرقوس k ام برابر با $\Delta s_k$ باشد. حال نقطه دلخواه $(x_i, y_i, z_i)$ را در هر زیرقوس انتخاب می‌کنیم و مجموع زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\,\Delta s_i$$

اگر f تابعی پیوسته باشد و C یک منحنی هموار باشد (یعنی $\vec{r}'(t)$ پیوسته و $\vec{r}'(t) \neq \vec{0}$) می‌توان نشان داد که مجموع $S_n$ وقتی که $\|\Delta\| \to 0$ به عدد خاصی همگرا می‌شود که آن را انتگرال خط تابع f روی قوس C می‌نامیم و با $\int_C f(x,y,z)\,ds$ نمایش می‌دهیم.

$$\int_C f(x,y)\,ds = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\,\Delta s_i$$

$$\int_C f(x,y,z)\,ds = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\,\Delta s_i$$

مشروط براینکه حدود فوق موجود باشند.

**قضیه (محاسبه انتگرال خط):** فرض کنید $f$ تابعی پیوسته در یک ناحیه شامل منحنی هموار $C$ باشد. اگر $C$ به کمک تابع برداری $\vec{r}(t)=x(t)\hat{i}+y(t)\hat{j}$ که در آن $a\le t\le b$ مشخص شود، دراینصورت:

$$\int_C f(x,y)\,ds=\int_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt$$

و اگر $C$ به کمک تابع برداری $\vec{r}(t)=x(t)\hat{i}+y(t)\hat{j}+z(t)\hat{k}$ که در آن $a\le t\le b$ است، مشخص شود، داریم:

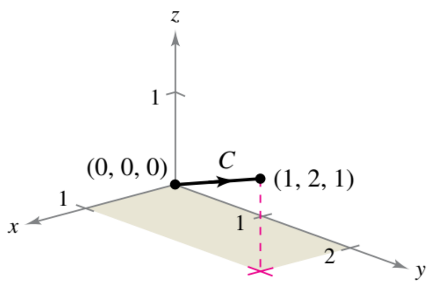
$$\int_C f(x,y,z)\,ds=\int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}\,dt$$

$$\left[\int_C f(x,y,z)\,ds=\int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\,|\vec{v}(t)|\,dt\right]$$

تذکر: اگر $f(x,y,z)=1$ دراینصورت:

$$\int_C 1\,ds=\int_a^b |\vec{v}(t)|\,dt=\text{طول قوس } C$$

**مثال 8:** انتگرال خط $\int_C (x^2-y+3z)\,ds$ که $C$ یک پاره خط مطابق شکل زیر است را محاسبه کنید.




ابتدا معادله پارامتری پاره خط را می نویسیم:

$$x=t,\quad y=2t,\quad z=t \qquad 0\le t\le 1$$

بنابراین $\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}=\sqrt{1^2+2^2+1^2}=\sqrt{6}$

پس

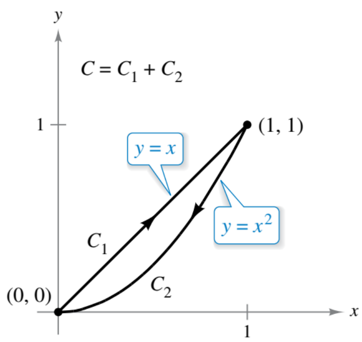
$$\int_C (x^2-y+3z)\,ds = \int_0^1 (t^2-2t+3(t))\sqrt{6}\,dt$$

$$=\sqrt{6}\int_0^1 (t^2+t)\,dt = \sqrt{6}\left(\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{5\sqrt{6}}{6}$$

تذکر: فرض کنید $C$ یک مسیر متشکل از منحنی های هموار $C_1$ ، $C_2$ ، ... ، $C_n$ باشد. اگر $f$ روی $C$ پیوسته باشد، دراینصورت:

$$\int_C f(x,y)\,ds = \int_{C_1} f(x,y)\,ds + \int_{C_2} f(x,y)\,ds + \dots + \int_{C_n} f(x,y)\,ds$$

مثال 9: $\int_C x\,ds$ را که $C$ یک منحنی به طور قطعه‌ای هموار مطابق شکل زیر است را به دست آورید:




$$C_1:\quad \vec{r}(t) = t\,\hat{i} + t\,\hat{j} \qquad 0 \le t \le 1$$

$$\vec{v}(t) = \hat{i}+\hat{j} \Rightarrow |\vec{v}(t)| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \int_C x\,ds = \int_0^1 t\sqrt{2}\,dt = \frac{\sqrt{2}}{2}t^2\Big|_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$C_2:\quad \vec{r}(t) = (1-t)\,\hat{i} + (1-t)^2\,\hat{j},\ 0 \le t \le 1$$ از طرفی

$$\vec{v}(t) = -\hat{i} - 2(1-t)\,\hat{j}$$

$$\Rightarrow |\vec{v}(t)| = \sqrt{1+4(1-t)^2}$$

$$\int_C x\,ds = \int_0^1 (1-t)\sqrt{1+4(1-t)^2}\,dt$$

$$= -\frac{1}{8}\times\frac{2}{3}\left(1+4(1-t)^2\right)^{3/2}\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{12}\left(5^{3/2}-1\right)$$

$$\Rightarrow \int_C x\,ds = \int_{C_1} x\,ds + \int_{C_2} x\,ds = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{12}\left(5^{3/2}-1\right)$$

مثال ۱۰: اگر $C$ به کمک تابع برداری $\vec{r}(t) = t\,\hat{i} + \frac{4}{3} t^{3/2}\,\hat{j} + \frac{t^2}{2}\,\hat{k}$ ، که $0 \le t \le 2$

مشخص شود، مطلوبست $\int_C (x+2)\, ds$ .

$$\vec{v}(t) = \hat{i} + 2 t^{1/2}\,\hat{j} + t\,\hat{k} \Rightarrow |\vec{v}(t)| = \sqrt{1+4t+t^2}$$

$$\Rightarrow \int_C (x+2)\, ds = \int_0^2 (t+2)\sqrt{1+4t+t^2}\, dt$$

$$= 1/2 \times \frac{3}{2}\left(1+4t+t^2\right)^{3/2} \Big|_0^2$$

$$= 1/3\left(13\sqrt{13} - 1\right)$$

مثال ۱۱: جرم فنری را پیدا کنید که با تابع برداری زیر مشخص می‌شود

$$\vec{r}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos(t)\hat{i} + \sin(t)\hat{j} + t\hat{k}), \quad 0 \le t \le 6\pi$$

و چگالی آن برابر است با $\rho(x,y,z) = 1+z$.

$$\vec{V}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} (-\sin(t)\hat{i} + \cos(t)\hat{j} + \hat{k})$$

$$|\vec{V}(t)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t) + 1} = 1$$

$$mass = \int_C (1+z)\,ds = \int_0^{6\pi} \left(\frac{t}{\sqrt{2}} + 1\right) dt = t + \frac{t^2}{2\sqrt{2}} \Big|_0^{6\pi}$$

$$= 6\pi \left(1 + \frac{3\pi}{\sqrt{2}}\right)$$

تذکر ۱: انتگرال خط یک میدان اسکالر به نحوه پارامتری شدن خم $C$ بستگی ندارد و به هندسه آن بستگی دارد.

تذکر ۲: انتگرال خط یک میدان اسکالر به جهت $C$ بستگی ندارد.

مثال ۹: مطلوبست جرم سیمی که روی منحنی $C$ فصل مشترک سهمی‌گون بیضوی $z = 2 - x^2 - 2y^2$ و استوانه سهموی $z = x^2$ بین نقاط $(0,1,0)$ و $(1,0,1)$ در یک هشتم اول قرار گرفته است و چگالی آن بصورت $\rho(x,y,z) = xy$ است.

حل: ابتدا منحنی $C$ را پارامتری می‌کنیم:

چون $0 \le x \le 1$ لذا $x = t$ قرار می‌دهیم از طرفی چون منحنی روی $z = x^2$ قرار دارد، $z = t^2$ و بنابراین از معادله سهمی‌گون بیضوی داریم:

$$2y^2 = 2 - x^2 - z = 2 - t^2 - t^2 = 2 - 2t^2 \Rightarrow y = \sqrt{1-t^2}$$

$$|\vec{V}(t)| = \sqrt{1^2 + \frac{t^2}{1-t^2} + 4t^2} = \frac{\sqrt{1 + 4t^2 - 4t^4}}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$m = \int_C xy\,ds = \int_0^1 t\sqrt{1-t^2}\,\frac{\sqrt{1+4t^2-4t^4}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

$$= \int_0^1 t\sqrt{1+4t^2-4t^4}\,dt \overset{u=t^2}{=} \tfrac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{1+4u-4u^2}\,du$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{2-(2u-1)^2}\,du \overset{v=2u-1}{=} \tfrac{1}{4}\int_{-1}^1 \sqrt{2-v^2}\,dv$$

$$= \tfrac{1}{4}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt{2}\cos(t)\sqrt{2}\cos(t)\,dt \qquad \left[\begin{array}{l} v=\sqrt{2}\sin(t) \\ dv=\sqrt{2}\cos(t) \end{array}\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^2(t)\,dt = \tfrac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \tfrac{1}{2}(1+\cos(2t))\,dt$$

$$= \tfrac{1}{4}\left(t+\tfrac{1}{2}\sin(2t)\right)\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = \pi/8 + \tfrac{1}{8}(2) = \pi/8 + \tfrac{1}{4} = \frac{\pi+2}{8}$$

## انتگرال خط میدان برداری:

**تعریف:** فرض کنید $\vec{F}$ یک میدان برداری پیوسته روی خم هموار $C$ باشد که به صورت

$$\vec{r}(t), \qquad a \le t \le b$$

تعریف شده است. انتگرال خط میدان $\vec{F}$ روی $C$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_C \vec{F}\cdot \vec{T}\, ds$$

$$= \int_a^b F(x(t), y(t), z(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\, dt$$

**نکته 1:** انتگرال فوق را گردش $F$ روی $C$ می‌نامند. اگر $\vec{F}$ نیرو در نظر گرفته شود، کار انجام شده توسط $\vec{F}$ برابر با انتگرال فوق خواهد بود.

**نکته 2:** انتگرال فوق به جهت مسیر بستگی دارد، در واقع اگر $-C$ را خمی در خلاف جهت $C$ در نظر بگیریم:

$$\int_{-C} \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

**نکته 3:** همچنان این انتگرال مستقل از نوع پارامتری کردن مسیر $C$ است.

**مثال:** کار انجام شده توسط میدان نیروی

$$\vec{F}(x,y,z) = -\tfrac{1}{2}x\,\hat{i} - \tfrac{1}{2}y\,\hat{j} + \tfrac{1}{4}\hat{k}$$

روی ذره‌ای که در مسیر خم زیر

$$\vec{r}(t) = \cos(t)\,\hat{i} + \sin(t)\,\hat{j} + t\,\hat{k}$$

از نقطه $(1,0,0)$ به نقطه $(-1,0,3)$ حرکت می‌کند را بیابید.

$$W = \int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^3 \left(-\tfrac{1}{2}\cos(t)\,\hat{i} - \tfrac{1}{2}\sin(t)\,\hat{j} + \hat{k}\right)\cdot\left(-\sin(t)\,\hat{i} + \cos(t)\,\hat{j} + \frac{\hat{k}}{4}\right) dt$$

$$= \int_0^3 \left(\tfrac{1}{2}\sin(t)\cos(t) - \tfrac{1}{2}\sin(t)\cos(t) + \frac{1}{4}\right) dt$$

$$= \int_0^3 \frac{1}{4}\, dt = \frac{t}{4}\Big|_0^3 = \frac{3}{4}$$

مثال ۱۰: فرض کنید $F(x,y)=y\hat{i}+x^2\hat{j}$ . گردش $F$ را روی منحنی $C$، $y=4x-x^2$

که نقطه $(1,3)$ را به $(4,0)$ متصل می‌کند بیابید.

$$x=t,\quad y=4t-t^2 \qquad 1\leq t\leq 4$$

$$\vec{r}(t)=t\hat{i}+(4t-t^2)\hat{j}$$

$$\vec{r}'(t)=\hat{i}+(4-2t)\hat{j}$$

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_1^4 \left((4t-t^2)\hat{i}+t^2\hat{j}\right)\cdot\left(\hat{i}+(4-2t)\hat{j}\right)dt$$

$$=\int_1^4 (4t-t^2+4t^2-2t^3)\,dt$$

$$=\int_1^4 (4t+3t^2-2t^3)\,dt=2t^2+t^3-\frac{t^4}{2}\Big|_1^4=\frac{69}{2}$$

مثال ۱۱: