معادله دیفرانسیل بسل: معادله دیفرانسیل زیر را معادله بسل می نامند:

$$x^2y''+xy'+(x^2-n^2)y=0$$

که در آن $n\in\mathbb{R}$. نقطه $x_0=0$ واضح است که یک نقطه منفرد منظم معادله بسل می باشد، پس این معادله دارای یک جواب فروبنیوسی حول نقطه $x_0=0$ می باشد.
با توجه به فرم کانونی معادله بسل:

$$y''+\underbrace{\tfrac{1}{x}}_{p(x)}y'+\underbrace{\frac{x^2-n^2}{x^2}}_{q(x)}y=0$$

داریم:

$$p_0=\lim_{x\to 0} x\,p(x)=1$$

$$q_0=\lim_{x\to 0} x^2 q(x)=-n^2$$

بنابراین معادله شاخص آن به صورت زیر خواهد بود:

$$r(r-1)+rp_0+q_0=0$$

$$r(r-1)+r-n^2=0 \Rightarrow r^2-n^2=0$$

لذا ریشه های معادله شاخص $r=\pm n$ هستند. اگر فرض کنیم $n>0$، لذا یک جواب معادله دیفرانسیل به صورت زیر است:

$$y_1(x)=\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+n}$$

با مشتق گیری از y_1 داریم:

$$y_1'=\sum_{m=0}^{\infty}(m+n)a_m x^{m+n-1}$$

$$y_1''=\sum_{m=0}^{\infty}(m+n)(m+n-1)a_m x^{m+n-2}$$

با جایگذاری سری های فوق در معادله بسل داریم:

$$x^2\sum_{m=0}^{\infty}(m+n)(m+n-1)a_n x^{m+n-2}+x\sum_{m=0}^{\infty}(m+n)a_m x^{m+n-1}$$
$$+x^2\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^{m+n}-n^2\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^{m+n}=0$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}[(m+n)(m+n-1)+(m+n)-n^2]a_m x^{m+n}+\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^{m+n+2}=0$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}[(m+n)^2-n^2]a_m x^{m+n}+\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^{m+n+2}=0$$

برای یکی شدن توان x در سری ها ابتدا دو جمله اول سری اول را جدا کرده و سپس تغییر اندیس $m \to m+2$ را اعمال می کنیم:

$$((1+n)^2-n^2)a_1 x^{n+1}+\underbrace{\sum_{m=2}^{\infty}[(m+n)^2-n^2]a_m x^{m+n}}_{\text{تغییر اندیس}}+\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^{m+n+2}=0$$

$$((1+n)^2-n^2)a_1 x^{n+1}+\sum_{m=0}^{\infty}[(m+n+2)^2-n^2]a_{m+2}x^{m+n+2}+\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^{m+n+2}=0$$

$$((1+n)^2-n^2)a_1 x^{n+1}+\sum_{m=0}^{\infty}[((m+n+2)^2-n^2)a_{m+2}+a_m]x^{m+n+2}=0$$

حال با توجه به اینکه ضرایب توان های x در سمت راست و چپ معادله فوق برابر باشند، باید داشته باشیم:

$$((1+n)^2-n^2)a_1=0 \Rightarrow a_1=0$$

$$((m+n+2)^2-n^2)a_{m+2}+a_m=0 \Rightarrow a_{m+2}=-\frac{a_m}{(m+2)(m+2(1+n))}, \quad m\geq 0$$

با توجه به رابطه بازگشتی بالا و رابطه $a_1=0$ داریم:

$$a_3=a_5=a_7=\dots=0$$

همچنین با قرار دادن $m=0$ داریم:

$$m=0 \Rightarrow a_2=-\frac{a_0}{2(2(1+n))}=-\frac{a_0}{2^2(1+n)}$$

$$m=2 \Rightarrow a_4=-\frac{a_2}{4(2+2(1+n))}=\frac{a_0}{2^4\cdot 2\times(n+1)(n+2)}$$

$$m=4 \Rightarrow a_6 = \frac{-a_4}{4(4+2(1+n))} = -\frac{a_0}{2^6\, 3!\,(n+1)(n+2)(n+3)}$$

با ادامه این روند می توان نشان داد:

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m a_0}{2^{2m}\, m!\,(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}$$

بنابراین چون $a_{2k+1}=0$ لذا:

$$y_1(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+n} = \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m} x^{2m+n}$$

$$= a_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m\, x^{2m+n}}{2^{2m}\, m!\,(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}$$

با قرار دادن $a_0 = \frac{1}{2^n \Gamma(n+1)}$ یک جواب خصوصی معادله بسل به دست می آید که آن را

تابع بسل نوع اول از مرتبه n می گوییم و با $J_n(x)$ نمایش می دهیم:

$$J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(m+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n}$$

اگر n عددی صحیح باشد، داریم:

$$J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,(m+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n}$$

اگر $n=0$ باشد، به این تابع، تابع بسل نوع اول مرتبه صفر می گویند و برابر است با:

$$J_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m}$$

به همین ترتیب اگر $n=1$ باشد، تابع بسل نوع اول مرتبه یک به دست می آید:

$$J_1(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,(m+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+1}$$

اگر n عددی غیرصحیح باشد، جواب دوم معادله بسل با درنظر گرفتن $r=-n$ به صورت روبه‌رو خواهد بود:

$$y_2(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m-n}$$

با فرآیندی کاملاً مشابه به رابطه بازگشتی زیر می‌رسیم:

$$a_{2m} = \frac{(-1)^n a_0}{2^{2m} m! (-n+1)(-n+2)\cdots(-n+m)}$$

$$a_1 = a_3 = a_5 = \cdots = 0$$

از اینجا $y_2(x)$ را به صورت زیر داریم:

$$y_2(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m a_0}{2^{2m} m! (-n+1)(-n+2)\cdots(-n+m)} x^{2m-n}$$

با قرار دادن $a_0 = \frac{1}{2^n \Gamma(-n+1)}$ یک جواب خصوصی به صورت زیر حاصل می‌شود که آن را با $J_{-n}(x)$ نمایش می‌دهیم:

$$J_{-n}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(-n+m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m-n}$$

تذکر: همانطور که قبلاً دیده‌ایم، تابع گاما برای $\alpha > 0$، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} \, dt$$

و در خاصیت زیر صدق می‌کند:

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha \Gamma(\alpha)$$

برای تعریف تابع گاما به‌ازای مقادیر غیرصحیح منفی α از خاصیت فوق کمک می‌گیریم و می‌نویسیم:

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha}$$

واین کار را انقدر ادامه می دهیم که $\alpha+1>0$ شود. به عنوان مثال:

$$\Gamma(-3/2)=\frac{\Gamma(-1/2)}{-3/2}=\frac{\Gamma(1/2)}{-3/2\times -1/2}=+\frac{4\sqrt{\pi}}{3}=2.36$$

اگر n عددی غیرصحیح و منفی باشد، دراین صورت

$$\lim_{x\to 0} J_n(x)=0 \quad , \quad \lim_{x\to 0}|J_{-n}(x)|=\infty$$

لذا توابع $J_n(x)$ و $J_{-n}(x)$ نمی‌توانند مضرب از یکدیگر باشند، بنابراین توابع $J_{-n}(x)$ و $J_n(x)$ از یکدیگر مستقل بوده، ولذا جواب عمومی معادله دیفرانسیل

بسل به صورت زیر خواهد بود:

$$y=C_1 J_n(x)+C_2 J_{-n}(x)$$

اگر n عددی صحیح باشد دراین صورت می‌توان نشان داد که

$$J_{-n}(x)=(-1)^n J_n(x)$$

لذا جواب مستقل دوم معادله دیفرانسیل بسل نمی‌تواند تابع $J_{-n}(x)$ باشد،

و برای تعیین جواب دیگر می‌توان از روش کاهش مرتبه کمک گرفت.

با درنظر گرفتن $y_2(x)=v(x)J_n(x)$ و به کمک فرمول آبل:

$$y_2(x)=J_n(x)\int \frac{1}{J_n^2(x)}\, e^{-\int P(x)dx}$$

$$=J_n(x)\int \frac{dx}{x\,J_n^2(x)}$$

تذکر: وقتی n عددی صحیح باشد چون تفاضل ریشه‌های معادله مفسر عددی صحیح خواهد بود، جواب دوم معادله را می‌توان به کمک سری زیر محاسبه نمود:

$$y_2(x)=C\,J_n(x)\ln(x)+\sum_{m=0}^{\infty} b_m x^{m-n}$$

برای یافتن جواب مستقل دوم معادله بسل می‌توان از تابع نیومن که به صورت زیر تعریف می‌شود کمک گرفت:

$$Y_\alpha(x) = \frac{J_\alpha(x)\cos(\alpha\pi) - J_{-\alpha}(x)}{\sin(\alpha\pi)} \qquad \alpha \notin \mathbb{Z}$$

حال اگر برای $n \in \mathbb{Z}$ تابع $Y_n(x)$ را به صورت زیر تعریف نماییم:

$$Y_n(x) = \lim_{\alpha \to n} Y_\alpha(x)$$

$Y_n(x)$ را تابع بسل نوع دوم از مرتبه n می‌نامند، می‌توان نشان داد که $Y_n(x)$ وقتی $n>0$، عددی صحیح است جواب دوم مستقل معادله بسل می‌باشد.

بنابراین جواب عمومی معادله بسل را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت:

$$y = c_1 J_n(x) + c_2 Y_n(x)$$

مثال: جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را به دست آورید:

$$4x^2 y'' + 4xy' + (8x^2 - 1)y = 0$$

حل: ابتدا معادله را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$x^2 y'' + xy' + (2x^2 - \tfrac{1}{4})y = 0$$

با تغییر متغیر $t = \sqrt{2}x$ داریم:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\underbrace{\frac{dx}{dt}}_{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}y' \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \sqrt{2}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\sqrt{2}\frac{dy}{dt}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} \times \underbrace{\frac{dt}{dx}}_{\sqrt{2}}\right) = 2\frac{d^2y}{dt^2}$$

پس می‌توانیم معادله را به صورت زیر بنویسیم:

$$\left(\frac{t^2}{2}\right)\left(2\frac{d^2y}{dt^2}\right) + \frac{t}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}\frac{dy}{dt}\right) + \left(t^2 - \tfrac{1}{4}\right)y = 0$$

$$t^2\frac{d^2y}{dt^2}+t\frac{dy}{dt}+(t^2-\tfrac{1}{4})y=0$$

که معادله بسل با $n=\frac{1}{2}$ است (معادله بسل مرتبه $\frac{1}{2}$) که چون n عددی غیر صحیح است جواب مسأله به صورت

$$y(t)=c_1J_{\frac{1}{2}}(t)+c_2J_{-\frac{1}{2}}(t)$$

$$\Rightarrow\ y(x)=c_1J_{\frac{1}{2}}(\sqrt{2}x)+c_2J_{-\frac{1}{2}}(\sqrt{2}x).$$

تذکر: معادله دیفرانسیل به صورت

$$x^2y''+xy'+(\lambda^2x^2-\nu^2)y=0$$

را معادله بسل با پارامتر λ گویند که با تغییر متغیر $t=\lambda x$ مشابه آنچه که در مثال قبل دیدیم به معادله بسل از مرتبه ν به فرم $t^2y''(t)+ty'(t)+(t^2-\nu^2)y=0$ در می‌آید که جواب عمومی آن به صورت

$$y(t)=c_1J_\nu(t)+c_2Y_\nu(t)$$

لذا

$$y(x)=c_1J_\nu(\lambda x)+c_2Y_\nu(\lambda x).$$

تذکر: جواب عمومی معادله دیفرانسیل به صورت $x^2y''+xy'+4(x^4-\nu^2)y=0$ را به کمک تغییر متغیر $t=x^2$ می‌توان به دست آورد. با قرار دادن $t=x^2$ داریم:

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=2x\frac{dy}{dt}=2\sqrt{t}\frac{dy}{dt}$$

$$y''=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dt}\left(2\sqrt{t}\frac{dy}{dt}\right)\underbrace{\frac{dt}{dx}}_{2x}=\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\frac{dy}{dt}+2\sqrt{t}\frac{d^2y}{dt^2}\right)\underbrace{2\sqrt{t}}_{2x}$$

با قرار دادن در معادله اصلی داریم:

$$t\left(2y'(t)+4ty''(t)\right)+\sqrt{t}\left(2\sqrt{t}\,y'(t)\right)+4(t^2-\nu^2)y(t)=0$$

$$4t^2y''(t)+4ty'(t)+4(t^2-\nu^2)y(t)=0$$

$$t^2y''(t)+ty'(t)+(t^2-\nu^2)y(t)=0$$

که معادله بسل مرتبه ν با جواب عمومی

$$y(t)=c_1J_\nu(t)+c_2Y_\nu(t)$$

لذا جواب عمومی معادله $y(x)=c_1 J_\nu(x^2)+c_2 Y_\nu(x^2)$ است.

مثال: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $9x^2y''+9xy'+(36x^4-16)y=0$ را به دست آورید.

با در نظر گرفتن $t=x^2$ معادله فوق به صورت زیر خواهد بود:

$$36t^2\frac{d^2y}{dt^2}+36t\frac{dy}{dt}+(36t^2-16)y=0$$

با تقسیم طرفین این رابطه بر 36 به معادله بسل مرتبه $\frac{2}{3}$ زیر می‌رسیم:

$$t^2y''(t)+ty'(t)+(t^2-4/4)y=0$$

$$\Rightarrow\quad y(t)=c_1 J_{2/3}(t)+c_2 J_{-2/3}(t) \qquad [2/3 \text{ غیرصحیح}]$$

$$\Rightarrow\quad y(x)=c_1 J_{2/3}(x^2)+c_2 J_{-\frac{2}{3}}(x^2)$$

نکته: معادله دیفرانسیل به فرم $4x^2y''+4xy'+(x-\nu^2)y=0$ به کمک تغییر متغیر $x=t^2$ به معادله دیفرانسیل بسل تبدیل می‌شود:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}\times\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2t}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2t}\frac{dy}{dt}\right)\frac{dt}{dx}=\left(-\frac{1}{2t^2}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{2t}\frac{d^2y}{dt^2}\right)\frac{1}{2t}$$

$$=-\frac{1}{4t^3}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{4t^2}\frac{d^2y}{dt^2}$$

با جایگذاری در معادله اصلی داریم:

$$4t^4\left(-\frac{1}{4t^3}y'(t)+\frac{1}{4t^2}y''(t)\right)+4t^2\left(\frac{1}{2t}y'(t)\right)+(t^2-\nu^2)y(t)=0$$

$$t^2y''(t)+ty'(t)+(t^2-\nu^2)y(t)=0$$

که معادله دیفرانسیل مرتبه ν است ولذا

$$y(t)=c_1 J_\nu(t)+c_2 Y_\nu(t)$$

$$y(x)=c_1 J_\nu(\sqrt{x})+c_2 Y_\nu(\sqrt{x})$$

مثال: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $xy''+y'+\frac{1}{4}y=0$ را به دست آورید.

حل: ابتدا طرفین معادله را در $4x$ ضرب می‌کنیم در اینصورت معادله به صورت زیر است:

$$4x^2y''+4xy'+xy=0$$

با توجه به نکته قبل با تغییر متغیر $x=t^2$ این معادله به صورت

$$t^2\frac{d^2y}{dt^2}+t\frac{dy}{dt}+t^2y=0$$

تبدیل می‌شود که معادله بسل مرتبه صفر است و لذا $y(t)=c_1J_0(t)+c_2Y_0(t)$ و بنابراین

$$y(x)=c_1J_0(\sqrt{x})+c_2Y_0(\sqrt{x}).$$

نکته: معادله دیفرانسیل به صورت $xy''+(1+2\nu)y'+xy=0$ با تغییر متغیر $y=x^{-\nu}u$ به معادله بسل تبدیل می‌شود:

$$y'=-\nu x^{-\nu-1}u+x^{-\nu}u'$$

$$y''=\nu(\nu+1)x^{-\nu-2}u-2\nu x^{-\nu-1}u'+x^{-\nu}u''$$

با جایگذاری در معادله اصلی داریم:

$$x^2u''+xu'+(x^2-\nu^2)u=0$$

که جواب آن

$$u(x)=c_1J_\nu(x)+c_2Y_\nu(x)$$

$$\Rightarrow y(x)=x^{-\nu}(c_1J_\nu(x)+c_2Y_\nu(x))$$

مثال: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $xy''+2y'+xy=0$ را به دست آورید:

حل: با مقایسه با نکته قبل $1+2\nu=2$ لذا $\nu=\frac{1}{2}$ پس با تغییر متغیر $y=x^{-1/2}u$

معادله به صورت $x^2u''+xu'+(x^2-\frac{1}{4})u=0$ خواهد بود، که جواب عمومی آن

$$u(x)=c_1J_{1/2}(x)+c_2J_{-1/2}(x)$$

$$y(x)=x^{-1/2}(c_1J_{1/2}(x)+c_2J_{-1/2}(x))$$

مثال : جواب عمومی معادله دیفرانسیل $xy'' - y' + xy = 0$ را بدست آورید.

حل : با درنظر گرفتن $y = ux$ داریم : $y' = u + xu'$, $y'' = 2u' + xu''$

$$\Rightarrow x(2u' + xu'') - (u + xu') + x^2 u = 0 \Rightarrow x^2 u'' + xu' + (x^2 - 1)u = 0$$

که معادله بسل مرتبه یک است و جواب عمومی آن برابر است با :

$$u(x) = c_1 J_1(x) + c_2 Y_1(x)$$

$$y(x) = (c_1 J_1(x) + c_2 Y_1(x))x$$