

بسمه تعالی

تمرینات سری سوم چگالی توام و امید ریاضی
 مهلت ارسال تمرینات تا ۲۳ آذر میباشد. ➤

(۱) متغیرهای تصادفی X و Y دارای چگالی احتمال توام زیر هستند:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} kxy & 0 < y < 2, 0 < x < y \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

الف) پس از تعیین مقدار k ، $P(X < Y / 3)$ را محاسبه کنید.

ب) تابع چگالی حاشیه ای Y را محاسبه نمایید.

ج) $P(X > \frac{1}{4} | Y = 1)$ را محاسبه نمایید.

د) $Cov(X, Y)$ را بیابید.

(۲) متغیرهای تصادفی X و Y دارای چگالی احتمال توام زیر هستند:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} kx^y & 0 < x < 1, 0 < y < 1-x \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

الف) پس از تعیین مقدار k ، $P(X < Y)$ را محاسبه کنید.

ب) تابع چگالی حاشیه ای X را محاسبه نمایید.

ج) $P(Y > \frac{1}{4} | X = \frac{1}{4})$ را محاسبه نمایید.

د) $Cov(X, Y)$ را بیابید.

(۳) متغیرهای تصادفی X و Y دارای چگالی احتمال توام زیر هستند:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} kx^y & |x| < y < 1 \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

الف) پس از تعیین مقدار k ، $P\left(Y > \frac{1}{2}\right)$ را محاسبه کنید.

ب) تابع چگالی حاشیه ای Y را محاسبه نمایید.

ج) $P\left(\frac{1}{4} < X < \frac{1}{3} | Y = \frac{1}{2}\right)$ را محاسبه نمایید.

د) $Cov(X, Y)$ را بیابید.

(۴) تابع چگالی احتمال توام متغیرهای تصادفی X و Y به صورت زیر است، $Cov(X, Y)$ را بیابید.

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & x^2 + y^2 < 1 \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

(۵) متغیر تصادفی X دارای چگالی احتمال زیر است. امید ریاضی و واریانس آن را محاسبه کنید.

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{4}{3} x e^{-2(x-1)} & x > 1 \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

(۶) متغیر تصادفی X دارای چگالی احتمال زیر است. امید ریاضی و واریانس آن را محاسبه کنید.

$$f_X(x) = \begin{cases} x e^{-x} & x > 0 \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

(۷) تابع چگالی احتمال توام متغیرهای تصادفی X و Y داده شده است. ضریب همبستگی X و Y را بیابید.

$y \backslash x$	-1	2	3
1	$\frac{2}{32}$	$\frac{4}{32}$	$\frac{1}{32}$
2	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{3}{32}$
3	$\frac{3}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{8}{32}$

(۸) در یک شهر ۵ درصد افراد دارای گروه خونی O منفی هستند و در یک مرکز اورژانس ۷ واحد گروه خونی O منفی موجود است. اگر در اثر یک سانحه ۱۲ نفر آسیب دیده و هر کدام از آنها به یک واحد خون نیاز داشته باشند، احتمال اینکه این مرکز در تامین واحدهای خونی گروه O منفی دچار کمبود شود چقدر است؟

(۹) تعداد مراجعه کنندگان به یک بانک از توزیع پواسون پیروی می کند. اگر به طور متوسط در یک ساعت ۸ نفر به این بانک مراجعه کنند،

الف) احتمال اینکه در نیم ساعت بیش از ۵ نفر مراجعه کنند چقدر است؟

ب) احتمال اینکه مدت زمان انتظار بین ورود دومین و سومین مراجعه کننده کمتر از ۱۰ دقیقه باشد، چقدر است؟

ج) مدت زمان انتظار بین ورود دو مراجعه کننده به طور متوسط چقدر است؟

د) احتمال اینکه مدت زمان انتظار بین ورود ۴ امین و ۷ امین مراجعه کننده کمتر از نیم ساعت باشد چقدر است؟

(۱۰) آزمایشات پزشکی نشان می دهند که ظرفیت جمعده جمعیت خاصی دارای توزیع نرمال با میانگین ۱۴۰۰ سی سی و انحراف معیار ۱۲۵ سی سی است. اگر شخصی به طور تصادفی انتخاب شود، احتمال اینکه ظرفیت جمعده فرد بیش از ۱۴۵۰ باشد چقدر است؟ بین ۱۳۰۰ و ۱۵۰۰ باشد چقدر است؟

(۱۱) قد یک جمعیت خاص از توزیع نرمال با میانگین ۱۷۴ و واریانس ۶۴ پیروی میکند. محققی می خواهد معیاری برای بلند قدی افراد بیان کند به طوری که فقط ۱۰ درصد افراد بلند قد باشند. داشتن حداقل چه قدی به عنوان معیار بلند قد بودن تعریف شود؟

۱۲) زمان رسیدن آمبولانس ها به نقاط اطراف یک شهر از توزیع نرمال با میانگین ۲۰ و انحراف معیار سه دقیقه پیروی می کند. الف) احتمال اینکه بیش از ۲۲ دقیقه طول بکشد تا آمبولانس برسد چقدر است؟ ب) احتمال اینکه بین ۱۸ تا ۲۱ دقیقه زمان ببرد تا آمبولانس به مقصد برسد چقدر است؟ ۱۳) از کل مراجعه کنندگان به یک فروشگاه ۲۵ درصد خرید می کنند. اگر ۷۰ نفر به این فروشگاه مراجعه کنند به کمک توزیع نرمال احتمال اینکه بیش از ۲۰ نفر خرید کنند را تقریب بزنید.

۱۴) تعداد مراجعین به یک بانک از توزیع پواسون پیروی می کند. در یک روز کاری به طور متوسط ۳۰ نفر به این بانک مراجعه می کنند. اگر در یک روز کاری بیش از ۵۰ نفر به این بانک مراجعه کنند این روز یک روز پرکار محسوب می شود. احتمال این که در ۳۰ روز کاری کمتر از ۵ روز پرکار داشته باشیم چقدر است؟

۱۵) در یک جنگل استوایی میزان ریزش روزانه باران از توزیع نرمال با میانگین ۴ میلی متر و انحراف معیار ۱ میلی متر پیروی می کند. اگر در یک روز میزان بارش باران بیش از ۶ میلی متر باشد آنروز روزی پر بارش محسوب می شود. احتمال اینکه در ۱۵ روز ۴ روز پر بارش داشته باشیم چقدر است؟

۱۶) طول عمر لامپ های تولیدی توسط یک شرکت به طور متوسط ۵۰۰۰ ساعت است. اگر طول عمر لامپ های این شرکت از توزیع نمایی پیروی کند احتمال اینکه از بین ۲۰ لامپ تولیدی این شرکت ۱۵ تای آن بیش از ۷۰۰۰ ساعت عمر کند، چقدر است؟

امیرحسین سبحانی